ВѢСТНИКЪ МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

№ 22 23 и 24.

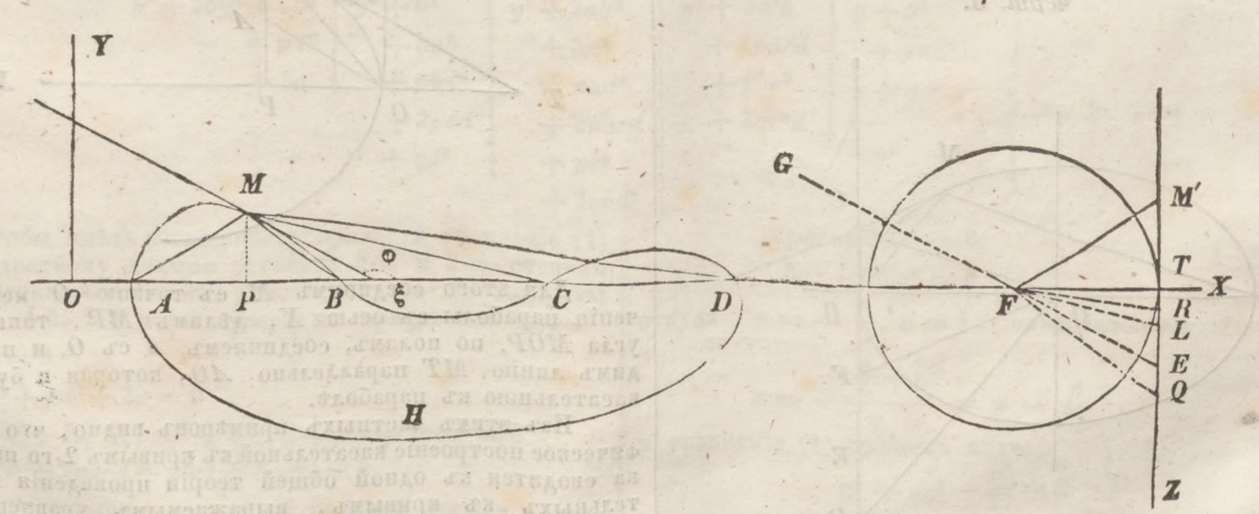
I.

Графическій способъ проведенія касательныхъ къ кривымъ на плоскости.

Всѣ графическіе способы проведенія касательныхъ къ кривымъ на плоскости, которые только предлагались до сихъ поръ, вытекали изъ непосредственнаго разсматриванія каждой кривой отдѣльно. Частныя свойства ея наводили на тотъ, или другой методъ построенія касательной; но попытокъ обобщить эти пріемы, выработать изъ нихъ указанія на общій способъ графическаго построенія, почти не было. Я предлагаю здѣсь общій графическій способъ проведенія касательныхъ къ тѣмъ кривымъ на плоскости, которыя выражаются уравненіемъ $y^m = fx$, гдѣ fx есть цѣлая, алгебраическая функція x, содержащая одни дѣйствительные корни, а показатель m можетъ быть числомъ цѣлымъ, или дробнымъ, положительнымъ, или отрицательнымъ, раціональнымъ, или ирраціональнымъ.

Разсмотримъ сперва тотъ случай, когда показатель m есть единица. Для проведенія касательной въ точкѣ M къ кривой $AMBCDH$ (черт. 1), выражаемой уравненіемъ $y = fx$, нужно данную точку M соединить съ A, B, C, D . . . всѣми точками пересѣченія кривой съ осью X, и построить при M линію подъ такимъ угломъ къ оси X, чтобы его тангенсъ равнялся алгебраической суммѣ тангенсовъ угловъ, образуемыхъ линіями MA, MB, MC, MD . . . съ осью X.

черт. 1. черт. 2.



Строеніе это сдѣлано на чертежѣ 2-мъ, гдѣ изъ центра F круга, описаннаго произвольнымъ радіусомъ, проведены линіи FM', FQ, FL, FR, параллельныя MA, MB, MC, MD и такимъ образомъ на линіи $M'Z$ отложены части TM', TQ, TL, TR, выражающія тангенсы данныхъ уловъ, положительные, или отрицательные, смотря по направленію линій, соединяющихъ точку M съ точками пересѣченія кривой съ осью X. По-

строивъ TE, равное алгебраической суммѣ линій TM', TQ, TL, TR, гдѣ всѣ отрѣзки, идущіе отъ X вверхъ считаются положительными, а внизъ отрицательными, и соединивъ E съ F, получимъ линію GE, которая и будетъ параллельна искомой касателлной $M\xi$.

Аналитическое доказательство предложеннаго способа очень просто. Если $y=fx$ есть уравненіе данной кривой, то пересѣченіе ея съ осью X опредѣлится изъ уравненія $fx=0$. Пусть корни этого уравненія, или абсциссы точекъ пересѣченія будутъ $OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OC=\gamma$, $OD=\delta$ и т. д.

Тангенсъ угла, наклоненія касательной къ оси X выразится чрезъ

$$f'x=\frac{fx}{x-\alpha}+\frac{fx}{x-\beta}+\frac{fx}{x-\gamma}+\frac{fx}{x-\delta}+\ldots$$

Для данной точки M, координаты которой $OP=k$ и $MP=fk$, выраженіе тангенса угла наклоненія касательной къ оси X приметъ видъ:

$$\text{tg.}\,\varphi=\frac{fk}{k-\alpha}+\frac{fk}{k-\beta}+\frac{fk}{k-\gamma}+\frac{fk}{k-\delta}\ldots,\ \text{или}$$

$$\text{tg}\varphi=f'k=\frac{MP}{OP-OA}+\frac{MP}{OP-OB}+\frac{MP}{OP-OC}+\frac{MP}{OP-OD}=\frac{MP}{AP}+\frac{MP}{-PB}+\frac{MP}{-PC}+\frac{MP}{-PD}+\ldots,$$

$$\text{или}\quad \text{tg.}\,\varphi=\text{tg.}\,MAX+\text{tg.}\,MBX+\text{tg.}\,MCX+\text{tg.}\,MDX+\ldots$$

Эта теорема алгебраической суммы тангенсовъ даетъ возможность строить касательную и въ томъ случаѣ, когда уравненіе кривой имѣетъ видъ

$$y^m=fx=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots,$$

при всякомъ m.

Для этого нужно соединить данную точку съ пересѣченіями кривой съ осью X, сдѣлать построеніе, удовлетворяющее выведенной теоремѣ алгебраической суммы тангенсовъ, и раздѣлить полученный тангенсъ на показателя m, принимая въ соображеніе и знакъ m. Частное и выразитъ тангенсъ угла наклоненія касательной къ оси X. Дѣйствительно для кривой

$$y^m=fx=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots$$

будетъ

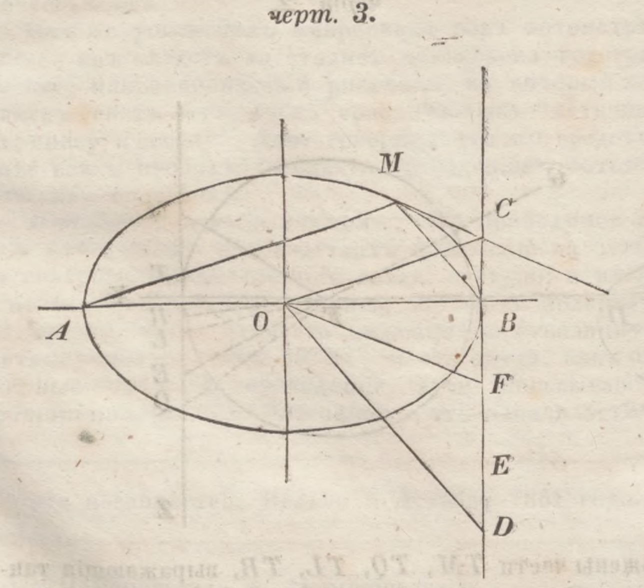
$$my^{m-1}\frac{dy}{dx}=\frac{fx}{x-\alpha}+\frac{fx}{x-\beta}+\frac{fx}{x-\gamma}+\ldots=\frac{y^m}{x-\alpha}+\frac{y^m}{x-\beta}+\ldots$$

$$\frac{dy}{dx}=\text{tg}\varphi=\frac{1}{m}\left[\frac{y}{x-\alpha}+\frac{y}{x-\beta}+\frac{y}{x-\gamma}+\ldots\right].$$

При графическомъ построеніи касательной къ кругу и эллипсу нужно раздѣлить алгебраическую сумму тангенсовъ по поламъ. Если кривая гипербола, выраженная по ассимптотамъ, которой уравненіе $y=\frac{1}{x}$, или $y^{-1}=x$, то нужно раздѣлить на -1 и т. д.

Графическое построеніе касательной къ эллипсу выражено на чертежѣ 3, гдѣ M соединено съ A и B, $OC \# MA$, $OD \# MB$, $BE=BD-BC$ и $BF=\frac{1}{2}BE$; касательная въ M параллельна линіи OF.

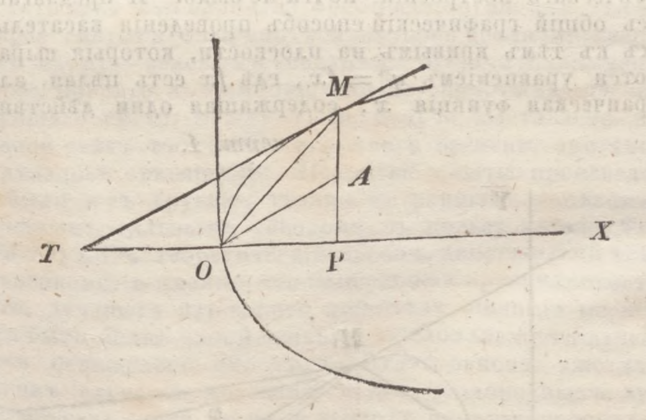
черт. 3.



Къ гиперболѣ касательная проводится точно также, какъ къ эллипсу.

Но всего замѣчательнѣе по своей простотѣ проведеніе касательной къ параболѣ, какъ видно на чертежѣ 4.

черт. 4.



Для этого соединимъ M съ точкою O пересѣченія параболы съ осью X, дѣлимъ MP, тангенсъ угла MOP, по поламъ, соединяемъ A съ O, и проводимъ линію MT параллельно AO, которая и будетъ касательною къ параболѣ.

Изъ этихъ частныхъ примѣровъ видно, что графическое построеніе касательной къ кривымъ 2-го порядка сводится къ одной общей теоріи проведенія касательныхъ къ кривымъ, выражаемымъ уравненіемъ $y^m=fx$, и совершается по способу, одинакому для всѣхъ этихъ кривыхъ.

Москва. 1861-го года, Ноября 14-го.

Н. Бугаевъ.

Раціональная функція, выражающая два корня кубичнаго уравненія по третьему, и Новый способъ рѣшенія этихъ уравненій.

Serret въ 16-мъ урокѣ своего сочиненія »Algèbre supérieure« находитъ раціональную функцію, дающую выраженіе двухъ корней кубичнаго уравненія по третьему, предполагая, что кубичное уравненіе рѣшено, и слѣдовательно извѣстны функціи, которыми опредѣляется x по коефиціентамъ уравненія $x^3+px+q=0$.

Безъ подобнаго предположенія можно обойтись, если только пользоваться общими пріемами при нахожденіи выраженій, связывающихъ одни корни уравненія съ другими, и потомъ, посредствомъ даннаго уравненія, исключить радикалы изъ этихъ выраженій.

Такъ, имѣя данное уравненіе

$$x^n+px^{n-1}+\ldots+tx+u=0,$$

и предполагая одинъ корень его a извѣстнымъ, мы, вычитая изъ этого уравненія выраженіе

$$a^n+pa^{n-1}+\ldots+ta+u=0,$$

найдемъ, послѣ раздѣленія остатка на $x-a$, уравненіе степени $n-1$:

$$(x^{n-1}+ax^{n-2}+a^2x^{n-3}+\ldots+a^{n-1})+$$
$$p(x^{n-2}+ax^{n-3}+\ldots+a^{n-2})+\ldots+t=0,$$

изъ котораго опредѣлимъ всѣ $n-1$ корней по данному.

Употребимъ подобный пріемъ для кубичнаго уравненія $z^3+pz+q=0$; вычтя отсюда $x^3+px+q=0$ найдемъ, по раздѣленіи на $z-x$, уравненіе

$$z^2+zx+x^2+p=0.$$

Предполагая извѣстнымъ корень x, мы изъ послѣдняго уравненія найдемъ выраженіе двухъ остальныхъ корней по x:

$$z_1=\frac{-x-\sqrt{-(4p+3x^2)}}{2},\quad z_2=\frac{-x+\sqrt{-(4p+3x^2)}}{2}.$$

Остается только замѣнить $\sqrt{-(4p+3x^2)}$ раціональною функціей.

Изъ даннаго уравненія: $x^3+px+q=0$ находимъ $(x^3+px)^2=q^2$; $x^6+2px^4+p^2x^2-q^2=0$. Раздѣливъ $27(x^6+2px^4+p^2x^2-q^2)$ на $4p+3x^2$, найдемъ въ частномъ $(3x^2+p)^2$, а въ остаткѣ $-(4p^3+27q^2)$, слѣдовательно

$$27(x^6+2px^4+p^2x^2-q^2)=(3px^2+p)^2(4p+3x^2)$$
$$-(4p^3+27q^2)=0;$$

откуда

$$-(4p+3x^2)=\frac{-(4p^3+27q^2)}{(3x^2+p)^2},$$

$$\sqrt{-(4p+3x^2)}=\frac{\sqrt{-(4p^3+27q^2)}}{3x^2+p}.$$

Замѣнивъ этотъ радикалъ въ выраженіяхъ z_1 и z_2, найдемъ такія же раціональныя функціи, опредѣляющія два корня кубичнаго уравненія по третьему, какъ у Serret:

$$z_1=-\frac{x}{2}-\frac{\sqrt{-(4p^3+27q^2)}}{2(3x^2+p)};\quad z_2=-\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{-(4p^3+27q^2)}}{2(3x^2+p)},$$

но полученныя гораздо проще.

Если въ уравненіе третьей степени $x^3+px+q=0$ вставимъ $x=\dfrac{a+by+y^2}{c+dy}$ гдѣ a, b, c, d произвольные постоянные, то по приведеніи къ одному знаменателю получимъ:

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l|l}
y^6+3by^5+3b^2 & y^4+b^3 & y^3+3ab^2 & y^2+3a^2b & y+a^3 \\
\quad\quad\quad +pd^2 & \quad +bab & \quad +3a^2 & \quad +2pacd & \quad +pac^2 \\
\quad\quad\quad +3a & \quad +pbd^2 & \quad +pad^2 & \quad +pbc^2 & \quad +qc^3 \\
 & \quad +2pcd & \quad +2pbcd & \quad +3qc^2d & \\
 & \quad +qd^3 & \quad +pc^2 & & \\
 & & \quad +3qcd^2 & &
\end{array}\right\}=0\;\ldots\ldots(1)$$

Чтобы имѣть возможность привести уравненіе (1) къ квадратному должно оставить 6-ю и 3-ю степени съ извѣстнымъ числомъ, для чего нужно коефиціенты при 5-й, 4-й, 2-й и 1-й степеняхъ приравнять нулю:

$$3b=0$$
$$3b^2+pd^2+3a=0$$
$$3ab^2+3a^2+pad^2+2pbcd+pc^2+3qcd^2=0$$
$$3a^2b+2pacd+pbc^2+3qc^2d=0$$

Изъ этихъ четырехъ уравненій найдемъ четыре коефиціента. Первому и четвертому удовлетворимъ положеніемъ $b=0$, $c=0$; 2-е же и 3-е уравненія дадутъ:

$$pd^2+3a\quad=0$$
$$3a^2+pad^2=0;$$

откуда $a=-\dfrac{p}{3}$, $d=1$, слѣдовательно

$$x=\frac{-\frac{p}{3}+y^2}{y}=y-\frac{p}{3y},$$

и уравненіе (1) приметъ видъ:

$$y^6+qy^3-\frac{p^3}{27}=0,$$

того самого разрѣшающаго уравненія, которое получилось положеніемъ $x=y+z$.

Москва 1861-го года, Декабря 21-го. **Н. Бугаевъ.**

О нахожденіи зависимости произвольной функціи отъ суммъ конечныхъ и суммъ дифференціальныхъ.

(Статья 3-ая См N. 17 и 21).

Чтобы найти искомую зависимость, возьмемъ, извѣстную уже намъ формулу:

$$\frac{\pi}{2}\, F(x,0)=\int_0^m\!\!\int_0^\infty F(x,y)\cos uy\,\partial u\,\partial y\ .$$

Такъ какъ въ ней функція $F(x,y)$ произвольная, то можемъ написать:

$$F(x,y)=\varphi(x,y)\,\frac{\frac{yh}{2}}{\sin\frac{yh}{2}}\,,$$

тогда: $\quad F(x,0)=\varphi(x,0)\,,$

$$\frac{\pi}{2h}\,\varphi(x,0)=\int_0^m\!\!\int_0^\infty \varphi(x,y)\,\frac{y}{2\sin\frac{yh}{2}}\cos uy\,\partial u\,\partial y\ .$$

Измѣнивъ, въ послѣднемъ равенствѣ, перемѣнную u въ $u-\frac{h}{2}$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{2h}\,\varphi(x,0)=\int_0^m\!\!\int_{-\frac{h}{2}}^t \varphi(x,y)\,\frac{y}{2\sin\frac{yh}{2}}\cos y\left(u-\frac{h}{2}\right)\partial u\,\partial y\,,$$

гдѣ $t=\infty$.

$$\text{Но}\quad \int_{-\frac{h}{2}}^t \cos y\left(u-\frac{h}{2}\right)\partial u=\frac{\sin y\left(t-\frac{h}{2}\right)}{y}\ ;$$

поэтому:

$$\frac{\pi}{2h}\,\varphi(x,0)=\int_0^m \varphi(x,y)\,\frac{\sin y\left(t-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{hy}{2}}\,\partial y=\int_0^m \varphi(x,y)\left[\frac{\sin y\left(t-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{yh}{2}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right]\partial y=\int_0^m \varphi(x,y)\left[\left\{\sum_0^t \cos uy\right\}-\frac{1}{2}\right]\partial y.$$

И такъ, искомая зависимость произвольной функціи отъ суммъ конечныхъ и суммъ дифференціальныхъ есть слѣдующая:

$$(A)\qquad \frac{\pi}{2h}\,\varphi(x,0)=\int_0^m \varphi(x,y)\left[\left\{\sum_0^\infty \cos uy\right\}-\frac{1}{2}\right]\partial y\,.$$

Измѣнивъ въ этой формулѣ перемѣнную y въ $\frac{y}{h}$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{2}\,\varphi(x,0)=\int_0^{mh} \varphi\left(x,\frac{y}{h}\right)\left[\left\{\sum_0^\infty \cos\left(\frac{uy}{h}\right)\right\}-\frac{1}{2}\right]\partial y\ .$$

Откуда слѣдуетъ, что это равенство до тѣхъ поръ имѣетъ мѣсто пока m величина конечная; если же $m=\infty$, то ясно, что h должно дѣлаться равнымъ 1.

Сдѣлаемъ приложеніе предпослѣдней формулы къ нахожденію нѣкоторыхъ замѣчательнѣйшихъ конечныхъ интеграловъ.

Для сего положимъ въ ней: $m=\infty\,,\ \varphi(x,y)=e^{-y^2}$, тогда найдемъ:

$$\frac{\pi}{2h}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y^2}\,\partial y+\int_0^\infty \sum_0^\infty e^{-y^2}\cos uy\,\partial y\,,$$

или:

$$\frac{\pi}{2h}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sum_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{2}\right)^2}\,,$$

а измѣнивъ, въ этомъ равенствѣ, перемѣнную $\frac{u}{2}$ на u, получимъ:

$$\text{I)}\qquad \frac{\sqrt{\pi}+1}{2}=\sum_0^\infty e^{-u^2}\,.$$

Положивъ въ формулѣ (A) $m=\infty\,,\ \varphi(x,y)=e^{-y}$, получимъ:

$$\frac{\pi}{2h}=-\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-y}\,\partial y+\int_0^\infty \sum_0^\infty e^{-y}\cos uy\,\partial y\,,$$

или:

$$\text{II)}\qquad \frac{\pi+1}{2}=\sum_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,.$$

Сдѣлаемъ, въ равенствѣ (A), сначала $\varphi(x,y)=e^y$, а потомъ $\varphi(x,y)=e^{-y}$, тогда получимъ:

$$\frac{\pi}{2h}=-\frac{1}{2}\int_0^m e^y\,\partial y+\int_0^m \sum_0^\infty e^y\cos uy\,\partial y\,,$$

$$\frac{\pi}{2h}=-\frac{1}{2}\int_0^m e^{-y}\,\partial y+\int_0^m \sum_0^\infty e^{-y}\cos uy\,\partial y\ ;$$

или:

$$\frac{\pi}{2h}=\frac{1-e^m}{2}+\sum_0^\infty \frac{u\,e^m\sin um+e^m\cos um-1}{1+u^2}\,,$$

$$\frac{\pi}{2h} = \frac{e^m - 1}{2} + \sum_0^\infty \frac{u e^{-m}\sin um + e^{-m}\cos um + 1}{1+u^2},$$

или:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1-e^m}{2} - \frac{\pi+1}{2} + \sum_0^\infty \frac{u e^m \sin um + e^m \cos um}{1+u^2},$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{e^{-m}-1}{2} + \frac{\pi+1}{2} + \sum_0^\infty \frac{u e^{-m}\sin um - e^{-m}\cos um}{1+u^2};$$

или:

$$\pi + \frac{e^m}{2} = \sum_0^\infty \frac{u e^m \sin um + e^m\cos um}{1+u^2},$$

$$-\frac{e^m}{2} = \sum_0^\infty \frac{u e^{-m}\sin um - e^{-m}\cos um}{1+u^2};$$

или:

$$\pi e^{-m} + \frac12 = \sum_0^\infty \frac{u\sin um + \cos um}{1+u^2},$$

$$-\frac12 = \sum_0^\infty \frac{u \sin um - \cos um}{1+u^2}.$$

Откуда:

III) $$\frac{\pi e^{-m}+1}{2} = \sum_0^\infty \frac{\cos um}{1+u^2};$$

IV) $$\frac{\pi e^{-m}}{2} = \sum_0^\infty \frac{u\sin um}{1+u^2}.$$

Пусть въ формулѣ (A) функція $\varphi(x, y)$ = постоянному числу; тогда:

$$\frac{\pi}{2h} = -\frac12\int_0^m dy + \int_0^m \sum_0^\infty \cos uy\, dy,$$

или $$\frac{\pi}{2h}+\frac{m}{2} = \sum_0^\infty \frac{\sin my}{y}.$$

Умножая обѣ части послѣдняго равенства на $h = dy$, найдемъ:

$$\frac{\pi}{h} = \int_0^\infty \frac{\sin my}{y}dy.$$

Такъ изъ конечнаго интеграла получается Эйлеровскій.

Зная значеніе сигмы: $\sum_0^\infty \frac{\sin my}{y} = \frac{\pi}{2h}+\frac{m}{2}$, или, все равно, сигмы: $\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin my}{y} = \frac{\pi}{h}$, легко найти величину слѣдующаго конечнаго интеграла:

V) $$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x}.$$

Въ самомъ дѣлѣ:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin ax\cos bx}{x} = \frac12\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x(a+b)}{x} + \frac12\sum_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x(a-b)}{x} = \frac{\pi}{h}$$ при условіи когда величины a и b положительныя и $a > b$.

$= 0$ при условіи когда количества a и b положительныя и $a < b$.

Положивъ въ теоремѣ (A) $\varphi(x, y) = y$, найдемъ:

$$0 = -\frac12\int_0^m y\,dy + \int_0^m \sum_0^\infty y\cos uy\,dy$$

или: $$0 = -\frac{m^2}{4} + \sum_0^\infty \frac{mu\sin mu + \cos mu - 1}{u^2},$$

отсюда:

VI) $$\frac{\pi m}{2h} + \frac{m^2}{4} = \sum_0^\infty \frac{\cos mu - 1}{u^2}$$

Послѣдній интегралъ долженъ имѣть мѣсто при всякомъ h; и дѣйствительно, принявъ въ немъ, напримѣръ, $m=1$, $h=2\pi$, найдемъ:

$$\frac12 = \sum_0^\infty \frac{\cos u - 1}{u^2} = \frac12.$$

Я думаю, этихъ примѣровъ достаточно, чтобы показать важность формулы (A) для теоріи конечныхъ опредѣленныхъ интеграловъ

Сдѣлавъ, въ формулѣ (A), функцію $\varphi(x, y) = \varphi(x+y)$ и измѣнивъ перемѣнную $x+y$ на y, найдемъ:

$$\frac{\pi}{h}\varphi(x) = \int_0^m \varphi(y)\left[\left\{\sum_0^\infty \cos u(y-x)\right\} - \frac12\right]dy.$$

А эта формула выражаетъ, что всякая функція $\varphi(y)$, удовлетворяющая условіямъ изложеннымъ въ первой статьѣ, разлагается въ сходящійся рядъ по синусамъ и косинусамъ какихъ-бы-то ни-было угловъ, при условіи, когда m величина конечная.

Очевидно, что, разсуждая подобнымъ-же образомъ, найдемъ:

$$\frac{\pi\varphi(x, y, \ldots)}{h.h, \ldots} = \int_0^m\int_0^n \ldots\varphi(\alpha, \beta, \ldots)\left[\left\{\sum_0^\infty\cos u(\alpha-x)\right\}-\frac12\right]\left[\left\{\sum_0^\infty \cos u(\beta-y)\right\}-\frac12\right]\ldots\ldots d\alpha\, d\beta\ldots\ldots$$

Возьмемъ еще разъ формулу (A) и измѣнимъ въ ней перемѣнную u въ $-u$, тогда получимъ:

$$\frac{\pi}{2h}\varphi(x, 0) = \int_0^m \varphi(x, y)\left[\left\{\sum_{-\infty}^0 \cos uy\right\}+\frac12\right]dy.$$

Складывая формулы (A) и (B), полумимъ:

$$\frac{\pi\varphi(x, 0)}{h} = \int_0^m \sum_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x, y)\cos uy\,dy.$$

Сдѣлавъ, въ послѣднемъ равенствѣ, функцію

$\varphi(x, y) = \varphi(x + y)$ и измѣнивъ перемѣнную $x + y$ на y, найдемъ:

$$(C) \qquad \frac{2\pi\varphi(x)}{h} = \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \cos u(y-x)\, dy\ .$$

Для примѣра приложенія послѣдней формулы, возьмемъ дифференціальное уравненіе распространенія теплоты въ прутѣ. Оно, какъ извѣстно, имѣетъ слѣдующій видъ:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - bu\ .$$

Чтобы найти корень этого уравненія, сдѣлаемъ въ формулѣ (C) функцію $\varphi(y) = \varphi(y, t) = u$, тогда будемъ имѣть:

$$u = \varphi(x, t) = \frac{h}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} M \cos u(y-x)\, dy\ ,$$

гдѣ $M = \varphi(y, t)$. Отсюда:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{h}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial M}{\partial t} \cos u(y-x)\, dy\ ,$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{h}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} a^2 M u^2 \cos u(y-x)\, dy\ ,$$

$$-bu = -\frac{h}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} bM \cos u(y-x)\, dy\ ;$$

слѣдовательно:

$$0 = \frac{h}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial M}{\partial t} + a^2 u^2 M + bM\right] \cos u(y-x)\, dy\ .$$

Отсюда:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + a^2 u^2 M + bM = 0\ ,$$

или

$$\frac{\partial M}{M} = -[a^2 u^2 + b]\, \partial t\ .$$

Проинтегрировавъ послѣднее равенство, относительно t, отъ $t = 0$ до $t = t$, найдемъ:

$$M = M_0\, e^{-[a^2 u^2 + b]t}\ ,$$

гдѣ M_0 не зависитъ отъ t, и равно функціи $\varphi(y, t)$ при $t = 0$, которая пусть будетъ $F(y)$, тогда имѣемъ:

$$u = \frac{h}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(y)\, e^{-[a^2 u^2 + b]t} \cos u(y-x)\, dy\ ,$$

или

$$u = \frac{h\, e^{-bt}}{2\pi} \int_{-n}^{+m} \sum_{-\infty}^{+\infty} F(y)\, e^{-a^2 u^2 t} \cos u(y-x)\, dy\ .$$

25 Сентября 1861-го года. *Н. Коціевскій.*

Интегрированіе нѣкоторыхъ кратныхъ интеграловъ.

Въ статьѣ »О произвольныхъ функціяхъ« (см. Вѣст. Мат. Н. № 17 стр. 136). Г-нъ Коціевскій предложилъ, для выраженія произвольныхъ функцій двойными интегралами, довольно замѣчательную формулу, а именно:

$$F(x, \psi(0)) = \frac{1}{\omega} \int_{\varepsilon c}^{\varepsilon b} \int_{\varepsilon^2}^{\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi(y))\, \Phi'(uy)\, du\, dy\ .$$

Въ той же статьѣ онъ далъ нѣсколько примѣровъ и между прочимъ указалъ на выводъ изъ нея формулы Фурье. Въ настоящей замѣткѣ мы приведемъ еще одинъ примѣръ, въ которомъ примѣняется формула Г-на Коціевскаго.

Для этого, формулу его представимъ въ нѣсколько измѣненомъ видѣ, а именно:

$$(A) \ldots F(x, \psi 0) = \frac{1}{2\omega} \int_{-\varepsilon c}^{+\varepsilon b} \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{+\frac{1}{\varepsilon}} F(x, \psi(ay))\, \Phi'(uy)\, du\, dy$$

гдѣ:

$$\omega = \int_{-c}^{+b} \frac{\Phi(z)}{z}\, dz\ , \quad \Phi(-z) = -\Phi(z)\ .$$

Полагая въ этой формулѣ:

$$\varepsilon = 0\ ,\ c = b = \frac{1}{\varepsilon^2}\ ,\ x = a^2\ ,\ \psi(0) = 1\ ,\ \psi(ay) = \left(\frac{a-y}{a}\right)^2$$

получимъ:

$$F(a^2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} F((y-a)^2) \cos uy\, du\, dy\ .$$

Или, полагая еще: $y - a = z$, найдемъ:

$$F(a^2) = \frac{1}{2\pi} \iint_{-\infty}^{+\infty} F(z^2) \cos u(z+a)\, dz\, du\ .$$

А замѣняя тригонометрическую функцію показательной, получимъ формулу, найденную уже нами другимъ способомъ (см. В. М. Н. стр. 148):

$$F(a^2)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+u(a+z)\sqrt{-1}}\,F(z^2)\,du\,dz\,.$$

Подобнымъ же образомъ, полагая въ (A)

$$\varepsilon=0\,,\; c=b=\frac{1}{\varepsilon^2}\,,\; \psi(ay)=\left(\frac{y-a}{a}\right)^n,\; x=a^n,\; y-a=z.$$

получимъ:

$$F(a^n)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(z^n)\cos u(z-a)\,du\,dz\,.$$

Формула эта можетъ служить для пониженія степени a.

Съ помощію формулы (A), можно опредѣлить также значеніе кратнаго интеграла:

$$U=\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots F(x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n+k)\cos x_1y_1\cos x_2y_2\ldots\cos x_ny_n\,dx_1\,dx_2\ldots dy_1\,dy_2\ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, полагая въ (A): $x=x_2+x_3+\ldots+x_n+k$,

$$\psi(ay)=1+\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n+k}\,,\; y=x_1\,,\; u=y_1$$

и принимая такіе же предѣлы, какъ и въ предъидущемъ примѣрѣ, получимъ:

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_1+x_2+\ldots+x_n+k)\cos x_1y_1\,dx_1\,dy_1=F(x_2+x_3+\ldots+k)\,.\,2\pi\,.$$

Подобнымъ образомъ:

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_2+x_3+\ldots+x_n+k)\cos x_2y_2\,dx_2\,dy_2=F(x_3+x_4+\ldots+k)\,.\,2\pi\,,$$

. . . .

$$\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(x_n+k)\cos x_ny_n\,dx_n\,dy_n=F(k)\,.\,2\pi\,;$$

а слѣдовательно:

$$\int\!\!\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty}\ldots F(k+x_1+x_2+\ldots+x_n)\cos x_1y_1\cos x_2y_2\ldots\cos x_ny_n\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n\,dy_1\,dy_2\ldots dy_n=(2\pi)^n F(k).$$

Если въ (A) положимъ $\Phi(z)=\sin z$, $\psi(xy)=1-\frac{y}{x}$, то получимъ: $F(x)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(x-y)\cos uy\,dy\,du$;

гдѣ полагая еще: $x-y=v$, получимъ формулу Фурье:

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{-\infty}^{+\infty} F(v)\cos u(x-v)\,dv\,du\,.$$

10-го Ноября 1861 года.

Л. Износковъ.

Численный циркъ Пиѳагорейцевъ.

Въ сочиненіи одного изъ учениковъ Пиѳагоровой щколы Ямблика (Jamblicus) (*), жившаго въ IV вѣкѣ, встрѣчается между прочимъ замѣчательная теорема, сущность которой заключается въ слѣдующемъ:

Чтобы образовать квадратъ какого нибудь числа, нужно написать числа въ два ряда, начиная отъ единицы до даннаго числа и потомъ данное число между ними; тогда сумма всѣхъ выписанныхъ чиселъ составитъ квадратъ даннаго числа.

Такъ напр. для квадрата 7-ми = 49, будетъ:

(*) Jambicus Chalcidensis ex Coele-Syria in Nicomachi Gerasini Arithmeticam introductionem et de Fato. Nunc primum editus, in latinum sermonem conversus, notis perpetuis illustratus à Samuele Tennulio. Accedit Joachimi Camerarii Explicatio in duos libros Nicomachi, cum indice rerum et verborum locupletissimo, Aruhemiae. Postant apud Jah. Frideriam Hagium. Daventrae typis discripsit Wilhelmus Wier CIƆIƆCLXVIII (1668).

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 .
⋰ 7
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 ⋰

Такое расположеніе чиселъ называютъ численнымъ циркомъ и справедливость теоремы очевидна для всякаго цѣлаго числа.

Въ самомъ дѣлѣ; возьмемъ какое-бы то ни-было цѣлое число n и составимъ циркъ:

1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . . . n—1 .
⋰ n
1 . 2 . 3 . 4 . 5 . . . . . n—1 ⋰

Складывая всѣ эти числа и означая черезъ S_{n-1} сумму чиселъ отъ *1* до n, получимъ:

$$2\,S_{n-1} + n\,;$$

но $$S_{n-1} = \frac{n\,(n-1)}{2}\;;$$

слѣдов. $$2\,S_{n-1} + n = n^2\quad,\;.\;.\;.\;.\;.\;\;(1)$$

что и доказываетъ теорему Ямблика (*).

Кромѣ того, разсматривая рядъ цѣлыхъ чиселъ, мы замѣчаемъ, что для числа 2-хъ, $S_{n-1} < n$; для 3-хъ: $S_{n-1} = n$ и, наконецъ, для всѣхъ остальныхъ чиселъ: $S_{n-1} > n$. Слѣдовавельно, можно написать еще такую теорему:

Если квадратъ цѣлаго числа (исключая 2 и 3) раздѣлимъ на сумму чиселъ, стоящихъ передъ этимъ числомъ; то въ частномъ получимъ два, а въ остаткѣ само число.

Подобно выраженію 1-му можемъ писать рядъ слѣдующихъ равенствъ:

$$2\,S_{n-2} + n-1 = (n-1)^2$$
$$2\,S_{n-3} + n-2 = (n-2)^2$$
$$.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$2\,S_2 + \;3\; = 3^2$$
$$2\,S_1 + \;2\; = 2^2$$
$$1 = 1^2$$

Складывая всѣ эти равенства съ 1-мъ и означая для краткости:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + .\;.\;. + (n-1)^2 + n^2 = S_n^{(2)}\;,$$

получимъ:

$$2\,(S_1 + S_2 + S_3 + .\;.\;. + S_{n-1}) + S_n = S_n^{(2)}\;;$$

что можно написать также въ видѣ цирка

S_1 . S_2 . S_3 . S_4 . . . . . S_{n-1} .
⋰ S_n
S_1 . S_2 . S_3 . S_4 . . . . . S_{n-1} ⋰

въ которомъ сумма всѣхъ членовъ даетъ $S_n^{(2)}$.

22-го Іюля 1861 г. *Л. Износковъ.*

(*) Кстати замѣтимъ здѣсь, что квадратъ каждаго цѣлаго числа n выражается также суммою всѣхъ *нечетныхъ* чиселъ отъ 1-цы до $2n-1$ включительно, причемъ число членовъ всегда равно n

Эта теорема содержится какъ частный случай въ другой общей, а именно: произведеніе двухъ какихъ либо цѣлыхъ чиселъ M и N всегда равно суммѣ членовъ ариѳметической прогрессіи съ разностію 2, начинающейся членомъ: $M-N+1$ и оканчивающейся $M+N-1$; откуда слѣдуетъ, что если M и N или оба четные, или нечетные; то произведеніе ихъ равно суммѣ всѣхъ *нечетныхъ* между данными предѣлами, если же одинъ изъ множителей четный, а другой нечетный; то произведеніе есть сумма *четныхъ* чиселъ, такъ:

$$5\,.\,7 = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 \qquad = -1 + 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$$
$$6\,.\,7 = 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12$$

Отсюда же слѣдуетъ, что какая либо степень цѣлаго числа всегда можетъ быть представлена суммою нечетныхъ чиселъ по порядку между извѣстными предѣлами. Между тѣмъ, составляя кубъ числа n сложеніемъ квадратныхъ выраженій онаго, числомъ n, а именно такимъ образомъ:

$$n^3 = 1 + 3 + 5 + \ldots + n \quad + (n+2) + \ldots + (2n-1)$$
$$= \quad 1 + 3 + \ldots + (n-2) + n \quad + \ldots + (2n-3) + 2n-1$$
$$= \quad 1 + \ldots + (n-4) + (n-2) + \ldots (2n-5) + (2n-3) + 2n-1$$
$$= \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$

получимъ:

$$n\,.\,n^2 = 1 + 2\,.\,2 + 3\,.\,3 + \ldots + n\,.\,n + (n-1)\,(n+2) + \ldots + (2n-1)$$

выраженіе, показывающее, что кубъ какого либо цѣлаго числа представляется также суммою натуральныхъ чиселъ, которые можно размѣстить въ формѣ квадрата, такъ напр. для 5-ти

```
              1
           2     2
        3     3     3
5³ = S   4     4     4     4
     5     5     5     5     5
        6     6     6     6
           7     7     7
              8     8
                 9
```

Это есть также частный случай произведенія изъ трехъ неравныхъ множителей, которое всегда можетъ быть выражено суммою ариѳметическихъ рядовъ, расположенныхъ въ формѣ параллелограмма, такъ что число циферъ, расположенныхъ по одной и по другой сторонѣ дастъ произведеніе изъ 2-хъ множителей, а третій множитель есть число *среднее*, (цѣлое, или дробное) которое помѣщается, или должно бы было помѣщаться въ центрѣ фигуры.

Прим. Ред.

Замѣчаніе о приблизительномъ дѣленіи круговыхъ дугъ на равныя части.

Н. С Еремѣева.

Начальная геометрія даетъ способъ дѣлить всякую круговую дугу на двѣ равныя части, а потому и на 4, 8, 16 и т. д., вообще на 2^n равныхъ частей, гдѣ n цѣлое и положительное.

Кромѣ того она даетъ возможность дѣлить окружность, а потому и каждую ея 2^mую часть на $3{,}2^n$ и на $5{,}2^n$ равныхъ частей, и наконецъ на 2^n+1 равныхъ частей (по способу Гауса). Во всѣхъ другихъ случаяхъ точное дѣленіе круговыхъ дугъ на равныя части невозможно. Изъ способовъ приблизительнаго дѣленія не на одно какое-ни-будь число равныхъ частей, какъ напр. на 3, извѣстенъ способъ, основанный на томъ что $\frac{1}{n-1}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}+\ldots$

Чтобы употребить этотъ способъ на практикѣ, необходимо, чтобы n было числомъ вида 2^p съ цѣлымъ и положительнымъ p, а потому $n-1$ имѣло-бы видъ 2^p-1. Для раздѣленія круговой дуги напр. на 7 частей, слѣдуетъ раздѣлить ее сначала на 8 частей, потомъ одну изъ частей еще на 8, и т. д.; тогда сумма полученныхъ частей $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\ldots$ будетъ приблизительно равна $\frac{1}{7}$. Понятно, что способъ этотъ неудобенъ. Впрочемъ на практикѣ вообще дѣлятъ круговыя дуги помощію транспортира, слѣд. изъисканіе способовъ приблизительнаго дѣленія круговыхъ дугъ на равныя части вообще не имѣетъ практической важности.

Въ предлагаемомъ здѣсь способѣ мы желаемъ только показать какимъ образомъ, зная дѣленіе дуги на 2^n частей, можно дѣлить оную и на какое-угодно число равныхъ частей. Способъ этотъ основывается на рѣшеніи слѣдующей задачи: Зная дѣлить дугу на $n-1$ равныхъ частей, раздѣлить ее на n равныхъ частей. Для рѣшенія этой задачи раздѣлимъ сначала всю дугу на $n-1$ равныхъ частей; потомъ, отдѣливъ одну часть, раздѣлимъ остатокъ дуги опять на $n-1$ равныхъ частей; затѣмъ, отдѣливъ отъ цѣлой дуги одну изъ вновь полученныхъ частей, остатокъ снова раздѣлимъ на $n-1$ равныхъ частей. Продолжая дѣйствовать такимъ образомъ, все болѣе и болѣе приближаемся къ истинной n-ой части дуги. Чтобы убѣдиться въ этомъ и получить вѣрное понятіе о степени приближенія, разсмотримъ дѣло поближе.

Если назвать раздѣляемую дугу a, части же ея, получаемыя отъ послѣдовательныхъ дѣленій $a_1\ a_2\ a_3$ и т. д., то законъ полученія частей можно изобразить формулой:

$$(1)\qquad a_p=\frac{a-a_{p-1}}{n-1},$$

гдѣ p означаетъ число послѣдовательныхъ дѣленій дуги и частей ея на $n-1$ равныхъ частей.

Чтобы вывести законъ разностей, положимъ, что часть a_{p-1}, полученная, какъ выше сказано, разнится отъ истинной n-ой части дуги на δ_{p-1}, такъ что

$$(2)\qquad a_{p-1}=\frac{a}{n}+\delta_{p-1},$$

гдѣ δ_{p-1} можетъ быть положительное или отрицательное. Въ такомъ случаѣ

$$(3)\quad a_p=\frac{a-a_{p-1}}{n-1}=\left(a-\frac{a}{n}-\delta_{p-1}\right):n-1=\frac{(n-1)a-n\delta_{p-1}}{n(n-1)}$$

$$\text{или}\quad =\frac{a}{n}-\frac{\delta_{p-1}}{n-1};$$

слѣд., называя разность между частью дуги a_p и истинною ея n-ою частью посредствомъ δ_p, получимъ

$$(4)\qquad \delta_p=\frac{-\delta_{p-1}}{n-1}.$$

И такъ каждая разность получается изъ предъидущей, когда раздѣлимъ эту послѣднюю на $n-1$ и перемѣнимъ знакъ. Вотъ законъ разностей.

Первое приближеніе, какъ мы видѣли, получается отъ раздѣленія данной дуги на $n-1$ равныхъ частей, слѣд $a_1=\frac{a}{n-1}$, а потому первая разность

$$\delta_1=a_1-\frac{a}{n}=\frac{a}{n-1}-\frac{a}{n}=\frac{a}{n(n-1)}.$$

Послѣ того $\delta_2=\frac{-a}{n(n-1)^2}$, $\delta_3=\frac{a}{n(n-1)^3}$ и т. д. При нечетномъ числѣ дѣленій въ числителѣ разности стоитъ a, при четномъ же $-a$, въ знаменателѣ же $n(n-1)^p$, гдѣ p число дѣленій. Такимъ образомъ общій видъ разности есть

$$(5)\qquad \delta_p=\frac{-a(-1)^p}{n(n-1)^p},$$

$$\text{а самое}\qquad a_p=\frac{a}{n}+\delta_p=\frac{[(n-1)^p-(-1)^p]\,a}{n(n-1)^p}\qquad(6)$$

Разсматривая выраженіе (5), мы видимъ, что разность между получаемыми сказаннымъ способомъ частями дуги и истинною n-ою частью ея: во 1-хъ съ увеличеніемъ p, т. е. числа послѣдовательныхъ дѣленій, можетъ быть сдѣлана меньше всякой данной величины и при каждомъ новомъ дѣленіи уменьшается въ $n-1$ разъ, слѣд тѣмъ быстрѣе, чѣмъ n больше; во 2-хъ она прямо пропорціональна дѣлимой дугѣ a, т. е. бóльшая дуга требуетъ и бóльшаго числа послѣдовательныхъ дѣленій, если хотимъ сохранить одну и туже точность; и въ 3-хъ при каждомъ новомъ дѣленіи мѣняетъ свой знакъ, притомъ такъ, что при нечетномъ числѣ дѣленій бываетъ положительною, при четномъ же отрицательною, и потому въ первомъ случаѣ получаемая часть больше истинной n-ой части дуги, а во второмъ меньше.

Такимъ образомъ, зная дѣлить каждую дугу на 2^n равныхъ частей, мы можемъ однимъ рядомъ послѣдовательныхъ дѣленій раздѣлить ее съ какимъ-угодно

приближеніемъ на 2^n+1 равныхъ частей, слѣд. на 3, 5, 9, 17 и т. д.

Такъ какъ полученную такимъ образомъ (2^n+1)-ую часть дуги можно опять раздѣлить на $2^{n'}$ равныхъ частей, то новый рядъ послѣдовательныхъ дѣленій дастъ намъ возможность дѣлить каждую дугу на $(2^n+1)\ 2^{n'}+1$ равныхъ частей, слѣд. на 7, 11, 19,... 13, 21, 37,... 25, 41, 73... Послѣ того понятно, какъ бо́льшее или мѐньшее число рядовъ послѣдовательныхъ дѣленій можетъ доставить какую - угодно часть круговой дуги.

О практическихъ пріемахъ такого приблизительнаго дѣленія круговыхъ дугъ на равныя части не стоитъ распространяться, потому что, какъ выше было сказано, ни одинъ изъ такихъ способовъ не можетъ имѣть практической важности. Замѣтимъ только, что

во 1-хъ при предложенномъ способѣ, одну и туже часть дуги можно находить иногда различными путями, весьма несходными по трудности;

во 2-хъ тѣмъ же способомъ можно находить приближенныя части дугъ, принимая за первое приближеніе какую угодно часть дуги; но разумѣется приближеніе будетъ тѣмъ быстрѣе, чѣмъ ближе подходитъ къ истинной искомой части дуги взятая нами первая приближенная часть (*).

(*) О приближенномъ дѣленіи цѣлой окружности по способу Ринальдини, см. „Практическія упражненія въ Геометріи *Гурьева* и *Дмитріева*“ С. П. Б. 1844. Отд. IV зад. 22.

II.

Обзоръ новѣйшихъ успѣховъ въ познаніи физическаго устройства солнца.

(Статья 4-я. См. N. 8, 11 и 18).

4. **До сихъ поръ астрономы и физики, говоря о** составѣ солнечныхъ покрововъ, ограничивались такъ сказать только общими воззрѣніями, не касаясь, за неимѣніемъ данныхъ, ихъ внутренняго, молекулярнаго и химическаго состава. Неожиданно на помощь астрономамъ является нынѣ химія, открывшая въ спектральныхъ наблюденіяхъ необыкновенно чувствительный реагентъ для химическаго анализа испытуемыхъ тѣлъ.

Когда источникомъ свѣта служитъ твердое, или жидкое тѣло, какъ напр. расплавленное серебро, уголь или платина въ раскаленномъ состояніи, то получаемый отъ нихъ спектръ является непрерывнымъ отъ одной оконечности до другой; но если свѣтъ истекаетъ изъ пламени горящаго газа, то почти всегда спектръ является болѣе или менѣе неполнымъ, въ коемъ отдѣльные лучи собираются группами, раздѣленными темными промежутками. По преимуществу металлы, приведенные въ парообразное состояніе подъ вліяніемъ гальваническаго тока, даютъ спектръ замѣчательный своими прерывами. Уитстонъ былъ первый, обратившій вниманіе на этотъ предметъ и въ то же время сдѣлавшій замѣчаніе, что число и расположеніе свѣтлыхъ и темныхъ линій спектра отличаются своими особенностями для каждаго металла. Съ тѣхъ поръ физики не переставали заниматься изслѣдованіемъ особенностей спектра: такъ Брюстеръ, (Poggend. Annal. LXIX) а потомъ Миллеръ и Даніель, пропуская свѣтъ черезъ цвѣтныя газы, открыли въ спектрѣ много тёмныхъ линій, расположенныхъ группами, которыя измѣнялись для различныхъ газовъ. Дж. Гершель (Transactions of the Royal soc. of Edinbourg) первый замѣтилъ, что отъ введенія соли натрія въ безцвѣтное пламя виннаго спирта спектръ измѣняется такъ, что остается почти только двойная желтая линія, которая существуетъ и въ солнечномъ спектрѣ, но является здѣсь тёмною, подобно тому какъ и въ электрическомъ свѣтѣ, въ случаѣ если интенсивный свѣтъ раскаленныхъ углей смѣшивается съ болѣе слабымъ свѣтомъ внѣшней дуги. Вилліамъ Сванъ (Poggend. Ann. XLIX) показалъ, что всѣ соли, разстворимыя въ спиртѣ, сообщаютъ пламени онаго желтоватый оттѣнокъ, которымъ отличается пламя спирта, насыщеннаго поваренною солью и, основываясь на повсемѣстномъ распространеніи въ природѣ хлористова натрія, онъ заключилъ, что присутствіе этого металла въ видѣ пыли въ воздухѣ достаточно для объясненія постоянной, двойной линіи спектра. Однимъ словомъ опыты показали, что почти для всѣхъ источниковъ свѣта, гдѣ можно доказать присутствіе раскаленнаго газа, существуютъ два простые луча весьма близкіе другъ къ другу и характеризующіеся недостаткомъ, или избыткомъ свѣта. Эти факты получили объясненіе въ новѣйшихъ изслѣдованіяхъ Бунзена и Кирхгофа.

Въ первый разъ въ Октябрской книжкѣ »Отчетовъ Берлинской Академіи Наукъ за 1859 годъ« встрѣчается извѣстіе объ изслѣдованіяхъ Г. Кирхгова относительно спектра различныхъ источниковъ свѣта. Двѣ свѣтлыя линіи спектра отъ пламени свѣчи, которыя, какъ упомянуто выше совершенно соотвѣтствуютъ темнымъ линіямъ *D* солнечнаго спектра, проявляются тѣмъ ярче, чѣмъ пламя болѣе содержитъ поваренной соли. Пропуская черезъ такое пламя солнечные лучи, Г. Кирхговъ получалъ спектръ то съ свѣтлыми то съ темными линіями, давая перевѣсъ солнечному свѣту, или по возможности умѣряя оный. Въ послѣднемъ случаѣ темныя линіи являются яснѣе; чѣмъ безъ присутствія пламени. Спектръ Друмондова свѣта также содержитъ свѣтлыя линіи натрія, но они вскорѣ исчезаютъ, если одно и то же мѣсто известковаго цилиндра подвергается накаливанію Но если затѣмъ свѣтъ отъ раскаленнаго цилиндра пропустить чрезъ спиртовое пламя, насыщенное поваренною солью, то въ спектрѣ являются, на мѣсто прежнихъ свѣтлыхъ, темныя линіи. Такимъ образомъ этимъ опытомъ доказывается возможность искуственнаго произведенія темныхъ линій въ спектрѣ, который не содержитъ оныхъ, если получается непосредственно отъ источника свѣта. Такое же искуствен-

ное превращеніе темныхъ линій въ свѣтлыя было доказано Г. Кирхговъ и для линій Фрауэнгофера B и C. Изъ этихъ наблюденій онъ заключилъ, что цвѣтное пламя, въ спектрѣ котораго содержатся свѣтлыя линіи, задерживаетъ лучи того же цвѣта, какой имѣютъ эти линіи, происходящія отъ другаго сильнѣйшаго источника, находящагося позади пламени, и въ спектрѣ котораго этихъ линій нѣтъ. Я считаю неизлишнимъ привести здѣсь теоретическія основанія, объясняющія вышеприведенные результаты опытовъ.

Если 2 тѣла въ формѣ неограниченныхъ пластинокъ, поставлены другъ противъ друга, и обращенныя другъ къ другу поверхности оныхъ содержатся въ отношеніи лучей извѣстнаго цвѣта какъ плоскія совершенныя зеркала, такъ что одна изъ пластинокъ испускаетъ и поглощаетъ только тѣ лучи, для которыхъ длина волны $= A$, всѣ же другіе вполнѣ отражаетъ. По этому всѣ лучи, испускаемые другимъ тѣломъ, для коихъ длина волны отлична отъ A, послѣ нѣсколькихъ отраженій отъ поверхности обоихъ тѣлъ возвратятся наконецъ ко IIой пластинкѣ и будутъ поглощены ею, Дабы разобрать теперь условія для равновѣсія лучей A, назовемъ лучеиспускательную способность 1-ой пластинки, или количество лучей съ той же длиною волны, испускаемыхъ съ одной стороны, E, а поглощательную ея способность, т. е. количество лучей поглощаемыхъ изъ 1-ны $= A$; такія-же значенія пусть имѣютъ e и a для второй пластинки: тогда мы можемъ представить движеніе лучей, имѣющихъ длину волны $= A$, слѣдующимъ замкнутымъ рядомъ:

I-ая пластинка испускаетъ лучей	II-я поглощаетъ лучей.	II-ая испускаетъ.	I-я поглощаетъ.
E	aE	$(1-a)\,E$	$A\,(1-a)\,E$
$(1-A)\,(1-a)\,E$	$a\,(1-A)\,(1-a)\,E$	$(1-A)\,(1-a)^2\,E$	$A\,(1-A)\,(1-a)^2\,E$
$(1-A)^2(1-a)^2\,E$	$a\,(1-A)^2\,(1-a)^2\,E$	$(1-A)^2(1-a)^3\,E$	$A\,(1-A)^2\,(1-a)^3\,E$
	и т.	д.	
.		e	Ae
$(1-A)\,e$	$a\,(1-A)\,e$	$(1-A)\,(1-a)\,e$	$A\,(1-A)\,(1-a)\,e$
	и т.	д.	

Поэтому общее количество лучей, вышедшихъ изъ I-й пластинки, и поглощенныхъ II-ою будетъ:

$$aE\,(1-k+k^2+k^3+\ldots)=\frac{aE}{1-k}\ ,$$

гдѣ $k=(1-A)\,(1-a)$. Количество же лучей, вышедшихъ изъ 2-й пластинки и мало по малу снова поглощенныхъ ею составитъ:

$$a\,(1-A)\,e\,(1+k+k^2+\ldots)=\frac{a\,(1-A)\,e}{1-k}\ ;$$

отсюда условіе для равновѣнія.

$$e=\frac{aE}{1-k}+\frac{(1-A)\,ae}{1-k}\ ,$$

или, вставляя значеніе k, $\frac{e}{a}=\frac{E}{A}$; т. е. отношеніе лучеиспускательной способности къ поглощательной въ обоихъ тѣлахъ должно быть одинаково. Что касается примѣненія этаго закона къ газамъ; то Г. Кирхговъ замѣчаетъ, что для нихъ отношеніе обѣихъ способностей есть функція температуры и длины волны, и что если она для видимыхъ лучей начинаетъ быть больше нуля, то тѣло начинаетъ испускать изъ себя свѣтъ, имѣющій цвѣтъ этаго луча. При той температурѣ, при которой раскаливаются твердыя тѣла это отношеніе должно уже имѣть значительную величину. Между тѣмъ газы, имѣющіе чрезвычайно слабую поглощательную и испускательную способности, еще не раскаливаются при этой температурѣ; при высшей же температурѣ, когда послѣдуетъ раскаливаніе, упоминаемое отношеніе должно возрасти. Это составляетъ основаніе объясненія почему цвѣтное пламя поглощаетъ свѣтъ собственнаго его цвѣта.

Теоретическія заключенія Г. Кирхгова уяснили, опыты надъ спектрами различныхъ металловъ, какъ то: натрія, литія, стронція, для коихъ доказано что, помѣщая позади пламени, въ коемъ находились эти металлы, другой сильнѣйшій источникъ Друмондова свѣта, характеристическія спектры этихъ металловъ измѣняются такъ, что вмѣсто свѣтлыхъ линій оныхъ являются темныя. Съ другой стороны они показали, что спектръ Друмондова свѣта, пропущеннаго чрезъ спиртовое пламя, насыщенное натріемъ, литіемъ, стронціемъ или другимъ улетучивающимся металломъ представляетъ очевидную аналогію съ солнечнымъ спектромъ.—Всѣ условія, соединенныя въ этихъ опытахъ для превращенія спектровъ, находятся и въ самомъ солнцѣ, представляя оное раскаленнымъ тѣломъ, окруженнымъ атмосферою, поглощающею значительное количество свѣтовыхъ лучей (*). Если къ этому прибавимъ, заключаетъ Г. Кирхговъ, »что двойная свѣтлая линія натрія является именно на томъ мѣстѣ въ солнечномъ спектрѣ, превращаясь въ темную, равно какъ и въ опытахъ искусственнаго превращенія спектра съ Друмондовымъ свѣтомъ; то нельзя не признать огромной вѣроятности, что въ составѣ солнечной атмосферы находится извѣстное количество натрія. Но кромѣ этой двойной линіи въ солнечномъ спектрѣ находится много другихъ разсѣянныхъ въ различныхъ цвѣтахъ, и по всей вѣроятности они обязаны своимъ происхожденіемъ исключительно поглащательной способности разнородныхъ газообразныхъ элементовъ, составляющихъ атмосферу солнца. Стоитъ слѣдовательно только изучить предварительно характеристическія линіи спектровъ различныхъ веществъ, дабы быть въ состояніи открыть со-

(*) *Kirchhoff*, Untersuchungen über das Sonnenspectrum (Abhandl. der Berl. Acad. 1861).

отвѣтственныя имъ линіи по положенію и размѣрамъ въ солнечномъ спектрѣ.« Г. Кирхгофъ утверждаетъ, что всѣ свѣтлыя линіи, характеризующія присутствіе въ пламени желѣза, точно соотвѣтствуютъ темнымъ линіямъ солнечнаго спектра. Тоже самое относится къ металламъ магнію, хрому и никелю, такъ, что въ настоящее время присутствіе въ солнечной атмосферѣ по крайней мѣрѣ пяти изъ извѣстныхъ намъ металловъ, по его мнѣнію, становится весьма вѣроятнымъ. Съ другой стороны столь же очевидно отсутствіе въ оной серебра, мѣди, цинка, аллюминія, кобальта и антимонія, которые всѣ даютъ весьма характеристическіе спектры, но ни одна изъ свѣтлыхъ линій оныхъ не имѣетъ соотвѣтственныхъ въ солнечномъ спектрѣ.

Сколь ни заманчивы выводы, предлагаемые Гейдельбергскими учеными, достигнутые новымъ и безъ сомнѣнія весьма много обѣщающимъ путемъ, мы должны принимать ихъ пока съ большою осторожностію. Довольно важное возраженіе противъ основательности заключеній Г. г. Кирхгофа и Бундзена представилъ въ недавное время Др. Гильтей (Giltay) (Cosmos Vol. 19 Livrais. 15). Прежде всего онъ обращаетъ вниманіе на важность предварительныхъ изслѣдованій по тому же предмету Профессора Плюкера. Послѣдній доказалъ опытами, что спектры раскаленныхъ газовъ (какъ простыхъ, такъ и сложныхъ) образуются изъ свѣтлыхъ полосъ на темномъ фонѣ; что эти полосы, при соотвѣтственномъ съуживаніи отверстія, пропускающаго свѣтъ, всегда могутъ быть разложены на такія, которыхъ ширина одинакова съ шириною отверстія и слѣдовательно эти полосы образуются свѣтомъ однороднымъ, для котораго показатель преломленія есть тотъ же самый, какъ и для средины этой полосы; что кромѣ того могутъ существовать въ спектрѣ полосы болѣе широкія, чѣмъ отверстіе, образуемыя свѣтомъ непрерывной преломляемости между предѣлами, соотвѣтствующими границамъ этой полосы. Эти послѣднія полосы могутъ выполнять значительную часть спектра. Разбирая результаты, Г. Плюкеръ высказалъ мнѣніе, что эти полосы не могутъ быть сравниваемы съ безчисленными темными линіями Фраунгофера весьма тонкими, но производимыми при помощи довольно широкаго отверстія. Линіи Фраунгофера суть темныя полосы на свѣтломъ фонѣ, или другими словами это суть мѣста, въ коихъ не достаетъ нѣкоторыхъ солнечныхъ лучей. Каждой полосѣ въ спектрахъ Кирхгофа и Бундзена соотвѣтствуетъ одинъ только показатель преломленія, между тѣмъ какъ для каждой Фраунгоферовой линіи, говоря теоретически, существуетъ безконечное множество лучей различной преломляемости. Измѣненіе свѣтлой полосы въ темную, въ опытахъ Кирхгофа, Г. Гильтей объясняетъ весьма просто тѣмъ, что въ свѣтѣ столь сильнаго напряженія, каковъ солнечный, лучи одной какой либо преломляемости, безъ сосѣдственныхъ лучей съ права и съ лѣва, должны казаться темными. При этомъ онъ вспоминаетъ опыты Форбеса, изъ которыхъ слѣдуетъ, что линіи Фраунгофера казались нисколько ни темнѣйшими во время солнечнаго затмѣнія 1836 года, т. е. въ томъ случаѣ, когда лучи, выходящіе отъ краевъ солнца должны были проходить болѣе значительный слой солнечной атмосферы. Тоже замѣчаніе сдѣлано Гладстономъ (Repar. of. Brit. Assor. 1858). Кромѣ того извѣстно (изъ наблюденій Піацци Смита, на Тенерифѣ), что Фраунгоферовы линіи являются менѣе темными на значительныхъ высотахъ надъ уровнемъ моря и даже нѣкоторыя изъ нихъ совершенно пропадаютъ, что заставляетъ предполагать поглощеніе извѣстныхъ солнечныхъ лучей въ земной атмосферѣ; наконецъ извѣстно также, что одно и то же вещество можетъ поглощать лучи различной преломляемости, какъ доказываютъ опыты надъ спектромъ свѣта, пропускаемаго чрезъ различные газы, наприм. азотистой кислоты, іода, брома и др.

Другое возраженіе принадлежитъ Г-ну Морренъ (Cosmos V. 19 Livr. 20). Онъ также находитъ преждевременнымъ, по присутствію нѣкоторыхъ свѣтлыхъ полосъ въ спектрѣ, судить о составѣ солнечной атмосферы; и справедливо утверждаетъ, что прежде всего нужно изучить вполнѣ особенности спектровъ всѣхъ различныхъ металловъ, дабы не впасть въ ошибку. Такъ, между прочимъ, онъ указываетъ, что крайняя красная полоса потассія не соотвѣтствуетъ точно полосѣ *A* солнечнаго спектра, какъ утверждаютъ Кирхгофъ и Бундзенъ, а именно она представляетъ гораздо меньшую преломляемость нежели послѣдняя. Опытъ, подтверждающій этотъ фактъ, былъ произведенъ авторомъ вмѣстѣ съ Г. Плюкеромъ. Кромѣ того, по замѣчанію Моррена, желтая полоса *D* является въ спектрѣ нетолько вслѣдствіе присутствія натрія, но также и многихъ другихъ металловъ, а въ особенности желѣза и ртути; наконецъ въ подтвержденіе своего мнѣнія о чрезвычайной трудности доказать соотвѣтственность въ положеніи полосъ спектра солнечнаго и отъ какого либо металла, онъ приводитъ наблюденія надъ электрическою дугою, которая, отъ ея внѣшней оболочки, для электродовъ изъ желѣза, даетъ столь огромное число полосъ въ спектрѣ, что ихъ трудно сосчитать, даже при значительномъ увеличеніи зрительной трубы.

Еще одно возраженіе противъ заключеній, выводимыхъ Г-мъ Кирхгофъ, представлено Г. Фэ (Comptes rendus T. LIII № 17) и заключается въ слѣдующемъ: По утвержденію физиковъ солнечная фотосфера должна давать, безъ участія атмосферы, спектръ непрерывный. Съ другой стороны опытъ показываетъ, что такой спектръ принадлежитъ тѣламъ жидкимъ или твердымъ. Не слѣдуетъ ли изъ этого заключить, что солнце должно быть раскаленнымъ жидкимъ, или твердымъ тѣломъ, испускающимъ свѣтовые лучи всѣхъ различныхъ степеней преломленія. Но въ такомъ случаѣ, что должны мы бы были думать о знаменитомъ опытѣ Араго, доказывающемъ полное отсутствіе поляризованнаго свѣта въ лучахъ идущихъ отъ краевъ солнца, и который обыкновенно принимаютъ за доказательство, что свѣтящая оболочка солнца можетъ быть только газообразною. Г. Фэ прибавляетъ, что ему »извѣстно только одно твердое тѣло, а именно печная сажа, которая въ раскаленномъ состояніи даетъ непрерывный спектръ и испускаетъ неполяризованный свѣтъ. При томъ, мнѣніе о газообразномъ состояніи солнечной фотосферы имѣетъ и другія физическія основанія, какъ наприм. чрезвычайно сильное развитіе теплоты; необходимость припятія удобнаго и непрерывнаго сообщенія внутри

этой огромной массы, дабы объяснить тѣмъ непрерывность истеченія свѣта и теплоты; незначительность плотности солнечной массы; быстроту въ образованіи факеловъ и пятенъ; непрерывныя и быстрыя движенія, которыя обнаруживаются испещреннымъ видомъ цѣлой солнечной поверхности.« Другое затрудненіе, находимое Г. Фэ въ принятіи солнечной атмосферы, наполненной металлическими парами, состоитъ въ явленіи вѣнца солнечнаго затмѣнія, который по его мнѣнію, долженъ бы былъ представляться въ такомъ случаѣ, рѣзко ограниченнымъ и не распространяющимся на разстояніе нѣсколькихъ полупоперечниковъ солнца. — Послѣднее мнѣніе очевидно не имѣетъ никакого физическаго основанія, ибо изъ изслѣдованій Кирхгофа не вытекаетъ еще необходимости допускать, что бы цѣлая атмосфера солнца была пропитана такими металлическими парами. Для объясненія явленія достаточно допустить, что они образуютъ только весьма тонкій слой, прилегающій къ фотосферѣ. Но, во всякомъ случаѣ, предложеніе Г. Фэ относительно произведенія спектральныхъ наблюденій во время будущихъ полныхъ солнечныхъ затмѣній заслуживаетъ полнаго вниманія. Спектръ солнечной атмосферы долженъ бы по теоріи Кирхгофа, представляться обратнымъ солнечному, т. е. съ свѣтлыми линіями на тёмномъ полѣ. Первое наблюденіе спектра вѣнца произведено было въ 1842 году Италіянскимъ физикомъ Фузиньери, который замѣтилъ при этомъ, что мѣсто занимаемое обыкновенно въ спектрѣ зеленымъ цвѣтомъ оставалось совершенно темнымъ. Такимъ образомъ блестящихъ полосъ магнія очевидно не доставало здѣсь. Послѣднія же наблюденія въ этомъ родѣ, сдѣланныя Г. г Ліэ и въ особенности Барреда (см. Вѣст. Матем. Наукъ № 11, письмо Пр. Медлера) согласно подтверждаютъ ослабленіе оранжеваго и фіолетоваго цвѣтовъ.

Изъ предъшествующаго изложенія результатовъ опыта и возраженій, которому мы съ намѣреніемъ сохранили возможную въ настоящемъ обзорѣ полноту, воздерживаясь отъ всякихъ преждевременныхъ заключеній, становится очевиднымъ, что разрѣшеніе вопроса о физическомъ и химическомъ состояніи солнечныхъ покрововъ можно почитать только лишъ начатымъ теперь. Но въ этомъ случаѣ важнѣе всего то, что здѣсь открылись новые пути для изслѣдованія, которые уже при самомъ началѣ оказываются плодотворными, и потому можно съ увѣренностію ожидать, что дальнѣйшее изученіе физическихъ и химическихъ свойствъ солнечнаго луча скорѣе всего поведетъ къ открытіи самой природы солнечнаго свѣта и условій съ коими связана замѣчательная неизмѣнность въ напряженіи онаго.--Тождество въ химическомъ дѣйствіи солнечнаго и электрическаго свѣта, происходящее отъ присутствія въ томъ и другомъ значительнаго количества такъ наз. ультрафіолетовыхъ лучей; возбужденіе флюоресценціи во многихъ тѣлахъ и способности нѣкоторыхъ изъ нихъ дѣйствовать фотографически въ слѣдствіе освѣщенія ихъ тѣмъ, или другимъ источникомъ свѣта, какъ обнаружили преимущественно изслѣдованія Ніепса, Шеврёля (C. Rendus XLVI, XLVII и Dingler Jour. CXLVIII CLI) и Беккереля (Annales d. Chimie v. LV) и многочисленныя наблюденія фосфоресценціи, собранныя по преимуществу Фипсономъ, Гейнрихомъ Розе, Рейхенбахомъ и др (C. R. LI, Pogg Annal. 1861) съ одной стороны указываютъ на то, что электрическій свѣтъ, какъ по напряженію, такъ и по своимъ свойствамъ всего болѣе приближается къ солнечному, съ другой все болѣе и болѣе вытѣсняютъ устарѣвшее и ограниченное понятіе о свѣтѣ, какъ процессѣ горѣнія, показывая, что это явленіе несравненно общее и обнаруживается всякій разъ, хотя и въ весьма различной степени, при измѣненіи молекулярнаго состоянія въ тѣлахъ, будь оно вызвано механическими, или химическими причинами. Но эти же причины и въ то же время, какъ давно извѣстно, нарушаютъ и электрическое равновѣсіе; такимъ образомъ проявленія свѣта и электричества суть явленія постоянно сопровождающія другъ друга: но при этомъ является весьма важный вопросъ одновременны ли онѣ, т. е. составляютъ ли *непосредственныя* и независимыя другъ отъ друга послѣдствія измѣненія молекулярнаго состоянія, или одно подчинено другому и, такъ сказать, является вездѣ второстепеннымъ и позднѣйшимъ? Намъ кажется, что новѣйшая физика находится уже на пути, который можетъ повести ее къ рѣшенію этого вопроса.

М. Гусевъ.

Библіографическій указатель.

38. *Todhunter M. A.* An Elementary Treatise on the Theory of Equations, with a Collection of Examples. 1861.

Это сочиненіе, на сколько позволяетъ ему элементарный характеръ, обнимаетъ новѣйшія изслѣдованія по всѣмъ отраслямъ излагаемаго предмета съ полною ясностію и вѣрнымъ критическимъ взглядомъ. Въ особенности заслуживаетъ вниманія отдѣлъ объ опредѣлителяхъ, который какъ нельзя болѣе способенъ основательно ознакомить съ главными началами этой новой богатой методы.

39. *Hartwig E. W.* Ueber die Berechnung der Auf- und Untergänge der Sterne. Nebst einigen Hülfstafeln. Schwerin. 1862.

Это сочиненіе имѣетъ интерессъ для занимающихся хронологіею; оно представляетъ выводъ формулъ и собраніе таблицъ для удобнѣйшаго вычисленія такъ наз. геліакальныхъ восхожденій и захожденій звѣздъ для данной широты мѣста.

40. *Zoellner.* Grundzüge einer allgemeinen Photometrie des Himmels. Berlin 1861.

Предметъ сочиненія составляетъ описаніе новаго, весьма остроумно устроеннаго авторомъ фотометрическаго прибора, описаніе метода пользованія онымъ и сравненіе силы свѣта болѣе 200 звѣздъ.

41. *Bruhns C.* Geschichte und Beschreibung der Leipziger Sternwerte zur Eröffnung der neuen Sternwarte am 8 Nov. 1861 Leipzig.

Эта брошюра при помощи описанія и рисунковъ знакомитъ съ устройствомъ небольшой обсерваторіи, вполнѣ соотвѣтствующей впередъ избранной, спеціально - научной цѣли. Желательно, чтобы такими обсерваторіями могла похвалиться не одна только средняя Европа.

42. *Mohn H.* Om Kometbanernes Indbyrdes Beligenhed. Christiania 1861.

Это сочиненіе, (изданное и на французскомъ языкѣ) написано для соисканія преміи, предложенной Университетомъ въ Христіаніи. Вопросъ, который старается рѣшить авторъ чрезвычайно интересенъ, а именно: нельзя ли открыть въ извѣстныхъ доселѣ кометныхъ орбитахъ одного преобладающаго направленія, которое бы не совпадало съ направленіемъ движенія солнечной системы и слѣд. указывало, на то, что кометы по ихъ происхожденію вообще чужды нашей планетной системѣ? Результатъ изслѣдованія таковъ. Полюсъ большаго круга, наиболѣе подходящаго къ положенію полюсовъ орбитъ всѣхъ непеpіодическихъ кометъ, какъ съ прямымъ такъ и возвратнымъ движеніемъ, лежитъ приблизительно въ долготѣ 2^0 и широтѣ 80^0; половина кометныхъ полюсовъ падаетъ внутри пояса, распространяющагося на 20^0 по обѣ стороны отъ вышеупомянутаго большаго круга, другая же половина внѣ оного; и наконецъ, направленіе движенія солнечной системы отклоняется почти на 90^0 отъ плоскости того же круга.

Сочиненія, изданныя въ Россіи въ теченіи 1860 и 1861 г. (*).

1. Начала Интегральнаго исчисленія, состав. *Н. Алексѣевъ.*
2. Начальная Алгебра, состав. *Сомовымъ* по порученію начальства Морскаго кадетскаго корпуса.
3. Курсъ Алгебры, сост. *К. Бріо* (перев. съ французскаго)
4. Алгебраическій Анализъ. Теорія численныхъ уравненій. Изъ лекцій Адъюнкта *Янишевскаго.*
5. Ариѳметика для начальныхъ и сельскихъ училищъ, состав. по методѣ Грубе *В. Золотовымъ.*
6. Практическая Ариѳметика, составилъ *П. Гурьевъ.*
7. Практическій взглядъ на точность и тожественность выводовъ, полученныхъ отъ дѣйствія надъ дробями, *Н. Божерянова.*
8. Упражненія въ Геометріи, сост. *И. Хмыровъ.*
9. Руководство къ теоретической Геометріи, *Ѳ. Дерябина.*
10. Начальныя основанія Аналитической Геометріи двухъ измѣреній. Руководство для воспитанниковъ Морскаго кадетскаго корпуса. Состав. *Сомовъ.*
11. Коническія сѣченія, соч. *Салмона,* перев. *М. Ващенки-Захарченки.*
12. Элементарная Механика (Курсъ III спец. класса Военно-учебныхъ зав.) Состав. *И. Вышнеградскій.*
13. Начала прикладной механики *Сонне*, перев. *Р. Грево.*
14. Теорія паровыхъ машинъ *Кадинскаго.*
15. Основаніе теоріи паровыхъ машинъ и котловъ, соч. Инженеръ Технолога *А. Серебренникова.*
16. Начальныя основанія устройства паровыхъ машинъ, соч. *Ортолина*, перев. Инженера *Усова.*
17. Историческая записка о паровыхъ машинахъ *Ф. Араго,* перев. *Хотинскаго.*
18. Динамика, соч. *Соколова* , Пр. Харьковскаго Университета.
19. Рѣшеніе задачи о волнахъ съ высшимъ приближеніемъ *А. Попова* (Ученыя записки Казан. Унив.)
20. Изложеніе Системы міра *Лапласа*, перев. *М. Хотинскаго.*
21. Теорія движенія небесныхъ тѣлъ, соч. Карла Фридриха *Гаусса*, перев. *Фогеля.*
22. Recherches astronomiques de l'Observatoire de Kasan publiées par *M. Kowalski* N. 1., содержащія:
    a. Sur les lois du mouvement propre des étoiles du catologue de Bradley.
    b. Sur le calcul de l'orbite elliptique ou parabolique d'après un grand nombre d'observations.
    c. Devéllopement de la fonction perturbatrice en série.
23. Очеркъ Астрономіи *Джона Гершеля*, перев. *Драшусова.*
24. Небесныя свѣтила, или планетныя звѣздныя міры, соч. *Митчеля.*
25. Общепонятная Астрономія, *Франсуа Араго*, перев. *Хотинскаго.*
26. Низшая Геодезія съ ея приложеніями къ военнымъ съёмкамъ и т. д. (издан. 2-ое) *А. Леве.*
27. Учебникъ Космической Физики, соч. *Миллера*, перев. *Н. Ильина.*
28. Теорія Теплоты изъ Физики *Дагена*, перев. *Э. Ленца.*
29. Школа Физики (для первоначальнаго изученія) соч. *Крюгера*, перев. *Поленова.*
30. Физика и метеорологія, общепонятно изложенная *Коппе*, перев. *А. Боровскаго.*
31. Общія физическія явленія, или такъ называемая общая физика. Соч. Др. *Циммерманна*, перев. *А. Горчакова.*

(*) Редакція желала бы въ этомъ спискѣ соединить всѣ математическія и физическія изданія, напечатанныя въ Россіи въ теченіи двухъ послѣднихъ лѣтъ, и намѣрена давать такія перечни на будущее время, по крайней мѣрѣ, за каждые полгода. По этому она приглашаетъ всѣхъ авторовъ и издателей сочиненій по предметамъ, входящимъ въ программу Вѣстника Математическихъ Наукъ сообщать въ Редакцію извѣстія о новыхъ пріобрѣтеніяхъ нашей ученой литературы какъ за прошедшіе годы, для пополненія предложеннаго здѣсь перечня, такъ и на будущее время. Періодическія изданія Академіи Наукъ, Главной Физической Обсерваторіи и Географическаго общества не входятъ въ этотъ списокъ, ибо полагаются всѣмъ извѣстными.

32. **Начальныя основанія физики.** Учебное пособіе для Гимназій *Н. Писаревскаго.*
33. **Начальныя основанія физики** (часть I) *Любимова.*
34. **Recherches expérimentales sur l'élasticité des métaux** par *Kupfer* T. I.
35. **Громъ и молнія** ученая записка *Ф. Араго* перев. *Хотинскаго.*
36. **Море въ своихъ физическихъ явленіяхъ**, соч. *Мори*, перев. *Модестова.*

III.

Извлеченіе изъ переписки Издателя, по поводу напечатанія въ № 10 »Вѣстника« статьи Г-на *Рощина*: »**Объобщеніе формулъ, относящихся къ показательнымъ и логарифмическимъ функціямъ**« (*).

1-е **Возраженіе** Г-на *Тиме.*

Сумма безконечнаго ряда: $1, \frac{z}{1}, \frac{z^2}{1.2}, \frac{z^3}{1.2.3}, \ldots$, сходящагося при всякомъ комплексномъ значеніи z, представляетъ *синектическую* функцію z, слѣд. *монодромную* или *однозначную* функцію, которую геометры изображаютъ чрезъ e^z и подъ этимъ обозначеніемъ не хотятъ разумѣть ничего другого, какъ только сумму вышеприведеннаго, всегда сходящагося ряда.

Если бы г. *Рощинъ* былъ правъ, говоря что »уравненіе

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \ldots$$

лишено общности, ибо вторая его часть для какого либо даннаго значенія z имѣетъ одно значеніе; между тѣмъ какъ первая часть можетъ имѣть нѣсколько и даже безконечное число значеній«; то функція e^z была бы *немонодромная* или *многозначная*, т. е. для каждаго опредѣленнаго значенія z она бы допускала нѣсколько различныхъ значеній, совокупность которыхъ г. *Рощинъ* и означаетъ чрезъ $((e^z))$. Но существенное свойство всякой немодромной функціи состоитъ въ томъ, что всегда можно повести перемѣнную z изъ ея настоящаго положенія по такому сомкнутому пути, что при возвращеніи ея въ первоначальное положеніе, каждое изъ значеній функціи перейдетъ въ какое угодно другое, что сокращенно можно выразить такъ: *различныя значенія немонодромной функціи всегда составляютъ взаимныя продолженія.* Если же условимся съ г. *Рощинымъ* разсматривать $((e^z))$ какъ $e^z\,((1^z))$, подобно тому какъ $((z^{\frac{1}{n}})) = z^{\frac{1}{n}}\,((1^{\frac{1}{n}}))$, то невозможно будетъ пріискать такого сомкнутаго пути, по которому одно изъ значеній $((1^z))$ могло бы перейти въ другое.

Замѣчаніе на предъидущее возраженіе, *П. Рощина.*

Подъ символомъ e^z геометры разумѣютъ исключительно сумму членовъ безконечнаго, всегда сходящагося ряда: $1, \frac{z}{1}, \frac{z^2}{1.2}\ldots$; но и въ моей статьѣ онъ не имѣетъ другаго значенія. Показательную функцію въ болѣе общемъ видѣ я изображаю чрезъ $((e^z))$ и подъ этимъ разумѣю ничто иное, какъ

$$e^z\,[\cos(2k\pi z) + i\sin(2k\pi z)]\ .$$

Что она имѣетъ безчисленное множество значеній при одномъ и томъ же z, это ясно; если же e^z, при какомъ либо данномъ значеніи z имѣетъ одно значеніе, то изъ этого не слѣдуетъ, что такое свойство должно имѣть и функція $((e^z))$. Поэтому все то, что говоритъ г. Тиме на счетъ функціи e^z, вовсе непримѣнимо къ $((e^z))$.

Далѣе Г. Тиме замѣчаетъ, что невозможно пріискать для z такого сомкнутаго пути, по которому одно изъ значеній $((1^z))$ могло бы перейти въ другое. Что-же изъ этого слѣдуетъ? Вѣдь можно же, не обращаясь вовсе къ показательнымъ фунцкіямъ, задать себѣ функцію вида: $\cos(2k\pi z) + i\sin(2k\pi z)$, означенную выше чрезъ $((1^z))$, и разсматривать ея свойства. Или можетъ быть за то, что она не удовлетворяетъ такому то условію, лишить ее названія функціи? — Отсюда можно заключить только то, что эта послѣдняя функція представляетъ собою безчисленное множество отдѣльныхъ монодромныхъ функцій, соотвѣтствующихъ различнымъ значеніямъ k; другими словами: всякій сомкнутый путь, приводящій z въ первоначальное положеніе, приводитъ и каждую изъ этихъ функцій въ прежнее ей соотвѣтствующее положеніе, которое конечно различно для различныхъ k.

2-ое **Возраженіе** Г-на *Тиме.*

Объобщить функцію $w = f(z)$ значитъ найти тѣ ея продолженія или вѣтви (см. 1-ое возраженіе), которыя до сихъ поръ были неизвѣстны. Если, кромѣ найденныхъ продолженій, функція другихъ не допускаетъ, то это явный признакъ, что мы достигли полнаго познанія фунцкіи и объобщили её до крайности, т. е. большее ея объобщеніе было бы невозможно, или иллюзорно. Приэтомъ недолжно упускать изъ виду, что всѣ возможныя вѣтви функціи должны имѣть свойство переходить одна въ другую, въ то время когда перемѣнная независимая $z = x + yi$ описываетъ различные пути въ плоскости (xy). Если же кто-либо, вздумаетъ считать за продолженіе или вѣтьви функціи $w = f(z)$ другую функцію, но не въ состояніи будетъ первую функ. перевести во вторую, или обратно, тотъ рѣшительно ошибается, считая двѣ разныя вещи частями одной и той же. То, что сказано здѣсь о функціи $w = f(z)$, относится и къ ея обратной $z = \varphi(w)$.

Положимъ, для примѣра, что имѣется алгебраическое, неприводимое уравн. $F(w, z) = 0$, степени m относительно w. Функція w состоитъ изъ m вѣтвей $w_1, w_2, \ldots, w_m$, которыя суть корни предъидущ. уравн. Всегда можно повести перемѣнную z по такому

(*) Редакція полагаетъ, что возбужденный этою статьею споръ можетъ имѣть интересъ для читателей Вѣстника, между которыми могутъ найтись партизаны того и другого мнѣнія.

сомкнутому пути, что вѣтви w_1, w_2,.., w_m перейдутъ одна въ другую. Напротивъ, если случится, что эти вѣтви разбиваются на такія двѣ группы w_1, w_2,..., w_i и w_{i+1}, w_{i+2}, . . . , w_m, что члены каждой изъ этихъ группъ, продолжаясь одни въ другіе, никакимъ образомъ не могутъ быть переведены въ члены другой группы, то это вѣрный признакъ того, что уравненіе $F(w, z) = 0$ есть разлагаемое, т. е. что оно опредѣляетъ двѣ различныя функціи. Одинъ множитель $F_1(w, z)$ первой части уравн. будетъ степени i относит. w, другой $F_2(w, z)$ степени $m - i$. Корни 1-го множителя составляютъ всѣ вѣтви одной функціи, а корни 2-го множителя всѣ вѣтви другой функціи, и никто не будетъ, не вдаваясь въ произвольность, разсматривать эту вторую функцію какъ продолженіе, или вѣтвь первой, т. е. никто не станетъ объобщать первой функціи помощію второй.

Рѣшительно на этомъ же основаніи нельзя разсматривать функцію

$$(1) \qquad e^z \left(\cos(2k\pi z) + i \sin(2k\pi z)\right) = e^z ((1^z))$$

какъ объобщеніе функціи e^z, и формулы г. Рощина для обратныхъ или логариѳмическимъ функцій, какъ объобщенія извѣстныхъ логариѳмическихъ формулъ. Напротивъ, самъ же г. Рощинъ говоритъ, что формула (1) представляетъ совокупность безконечнаго числа различныхъ монодромныхъ, слѣд. не предолжающихся одна въ другую, функцій. И послѣ этаго на какомъ же основаніи онъ заключаетъ: »что изъ того еще ничего не слѣдуетъ, если невозможно пріискать для z такого сомкнутаго пути, по которому одно изъ значеній $((1^z))$ могло-бы перейти въ другое«; въ то время какъ все сосредоточивается на этомъ, отъ существованія, или несуществованія чего зависитъ смыслъ, или же иллюзорность выводовъ Г-на Рощина.

Отвѣтъ на предъидущее возраженіе. *П. Рощина.*

Г. Тиме говоритъ: *»объобщить функцію $w = f(z)$ значитъ найти тѣ ея продолженія или вѣтви, которыя до сихъ поръ были неизвѣстны; но при этомъ не должно упускать изъ виду, что всѣ возможныя вѣтви функціи должны имѣть свойство переходить одна въ другую, въ то время, когда перемѣнная независимая $z = x + yi$ описываетъ различные пути въ плоскости (xy)«.*—Слишкомъ ограниченное объобщеніе! И для чего навязывать функціи такія, почему-то будто-бы необходимыя условія переходимости однихъ ея значеній въ другія? Я не раздѣляю мнѣнія Г Тиме, который продолжаетъ такъ: *»считать одну функцію продолженіемъ, или вѣтвью другой, не будучи въ состояніи перевести одну въ другую, значитъ заблуждаться, почитая двѣ разныя вещи частями одной и той-же«.* Если-бы въ моей статьѣ было принято и высказано вышеупомянутое ограниченіе, тогда послѣднее замѣчаніе Г. Тиме имѣло-бы смыслъ; а теперь оно походитъ на то, если-бы я, принявши какое нибудь произвольное положеніе, сталъ отвергать чьи-либо выводы на основаніи только того, что они не удовлетворяютъ моему положенію.

Относительно уравненія $F(w, z) = 0$, приведеннаго Г. Тиме для примѣра, можно сказать, что если оно разлагается на два $F_1(w, z) = 0$ и $F_2(w, z) = 0$, и вслѣдствіе того опредѣляетъ двѣ различныя функціи перемѣнной z, то все-таки эти послѣднія функціи представляютъ частные виды одной болѣе общей, а именно функціи w, удовлетворяющей уравненію $F(w, z) = 0$. Вѣдь и неприводимое уравненіе можно представить себѣ разложеннымъ на нѣсколько другихъ; только эти послѣднія будутъ ирраціональныя. Однакожъ во всякомъ случаѣ можно сказать, что w, удовлетворяющее неприводимому уравненію $F(w, z) = 0$, опредѣляетъ нѣсколько различныхъ функцій w_1, w_2, . . . перемѣнной z, удовлетворяющихъ уравненіямъ $F_1(w_1, z) = 0$, $F_2(w_2, z) = 0$, . . . , въ которыхъ функціи F_1, F_2, . . . ирраціональныя,— и тѣмъ не менѣе каждая изъ функцій w_1, w_2, . . . представляетъ видъ одной w, опредѣляемой уравненіемъ $F(w, z) = 0$.

Извлеченія изъ періодическихъ изданій.

1. О нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интегралахъ, Др. *Эннеперъ* (Zeitschrift für Mathem. 6 Jahrg. 6 Heft. 1861).

Означая
$$P = \int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{1+u^2}\, du,$$

мы имѣемъ
$$P^2 = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-z(u+v)}}{(1+u^2)(1+v^2)}\, du \,.\, dv,$$

а вводя 2 новыя перемѣнныя, связанныя съ первыми уравненіями

$$u = r\omega, \quad v = r(1-\omega)$$

получаемъ:

$$P^2 = \int_0^\infty r\, e^{-zr}\, dr \int_0^1 \frac{d\omega}{[1+r^2\omega^2][1+r^2(1-\omega)^2]}.$$

Подобнымъ же образомъ изъ

$$Q = \int_0^\infty \frac{u\, e^{-zu}}{1+u^2}\, du = -\frac{dP}{dz},$$

выходитъ

$$Q^2 = \int_0^\infty r^3 e^{-zr}\, dr \int_0^1 \frac{\omega(1-\omega)\, d\omega}{[1+r^2\omega^2][1+r^2(1-\omega)^2]}.$$

Складывая P^2 и Q^2 и производя интегрированіе по ω,

будетъ: $P^2+Q^2=\int_0^\infty e^{-zr}\,\frac{l(1+r^2)}{r}\,dr$.

Этотъ результатъ можетъ быть еще выраженъ иначе. Съ одной стороны, вводя извѣстное выраженіе

$$\frac{1}{r}e^{-zr}=\frac{\pi}{2}\int_0^\infty\frac{\cos zu}{r^2+u^2}\,du$$

и производя интегрированіе въ отношеніи r, получается

$$P^2+Q^2=2\int_0^\infty\frac{\cos zu}{u}\,l(1+u)\,du\,;$$

съ другой стороны извѣстно что P и Q представляются слѣдующимъ образомъ:

$$P=\int_0^\infty\frac{\sin zu}{1+u}\,du=\cos z\int_z^\infty\frac{\sin v}{v}\,dv-\sin z\int_z^\infty\frac{\cos v}{v}\,dv\,,$$

$$Q=\int_0^\infty\frac{\cos zu}{1+u}\,du=\sin z\int_z^\infty\frac{\sin v}{v}\,dv+\cos z\int_z^\infty\frac{\cos v}{v}\,dv\,;$$

такимъ образомъ получается окончательно

$$\left[\int_z^\infty\frac{\cos v}{v}\,dv\right]^2+\left[\int_z^\infty\frac{\sin v}{v}\,dv\right]^2=\int_0^\infty\frac{l(1+r^2)}{r}\,e^{-zr}\,dr=2\int_0^\infty\frac{l(1+u)}{u}\cos zu\,du\,,$$

формула, которая представляетъ аналогію съ основною тригонометрическою: $\cos^2 z+\sin^2 z=1$.

2. Относительно строки Ламберта. Др *О. Шлёмильх'а* (Zeitschrift für Math. und Physik 6. Jahrg. 6. Heft.)

До сихъ поръ извѣстно было только одно преобразованіе ряда Ламберта, а именно представленное Кляузеномъ въ журналѣ Креля (Т. III. Стр. 95), которое съ пользою можетъ служить для суммованія строки, въ случаѣ если подставовляемая величина значительно менѣе единицы. Г. Шлёмильхъ даетъ теперь для суммованія оной опредѣленный интегралъ, который разлагается въ слѣдующій рядъ:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots=\frac{C-ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{4}-\frac{(B_1)^2}{1.2.2}\,l\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(B_3)^2}{1.2.3.4.4}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3-\ldots$$

$$-\frac{(B_{2k-1})^2}{1\ldots(2k).2k}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{2k-1}-\frac{1}{2}\,\pi\,\varrho\,\frac{(B_{2k+1})^2}{1\ldots(2k+2)(2k+2)}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{2k+1}$$

гдѣ $B_1, B_3\ldots$ суть Бернулліевы числа и значеніе коефиціентовъ слѣдующее:

$$C=0{,}5772156649\ldots$$

$$\frac{(B_1)^2}{1.2.2}=\frac{1}{144}\,,\quad\frac{(B_3)^2}{1\ldots4.4}=\frac{1}{86400}$$

$$\frac{(B_5)^2}{1\ldots6.6}=\frac{1}{7620480}\,,\quad\frac{(B_2)^2}{1.2\ldots88}=\frac{1}{290304000}$$

и т. д.

Когда x равно или больше 0,9, то для полученія суммы точной еще въ 7-мъ десятичномъ знакѣ достаточно удержать только 3 первые члена вышеприведенной строки; тогда какъ рядъ Кляузена для достиженія той же точности требуетъ вычисленія покрайней мѣрѣ 13-ти членовъ. Вычисленіе, сдѣланное для сравненія при $x=0{,}4$ по формулѣ Шлёмильха дало $S=0{,}9689841590$, а по формулѣ Кляузена $S=0{,}9689841593$.

Г.

3. Объ изохроматической поверхности *Бертена*. (Ann. de ch. et d. Ph. T. LXIII, p. 57)

Пропуская пучекъ поляризованнаго свѣта черезъ кристаллическую пластинку, и принимая его на турмалинъ или призму Николя, можно, какъ извѣстно, получить все поле зрѣнія испещреннымъ кривыми линіями— темными, если употребленный свѣтъ былъ однородный, и радужными, когда онъ былъ бѣлый. Видъ кривыхъ зависитъ отъ свойства кристалла и отъ его сѣченія, а именно въ одноосныхъ кристаллахъ бываютъ:

a) Кольца — когда пластинка перпендикулярна къ оптической оси.
b) Гиперболы—когда она параллельна,
и c) Эллиптическія или параболическія, когда она наклонна къ оптической оси.

Въ двуосныхъ кристаллахъ:

a) Кольца — когда пластинка перпендикулярна къ одной изъ осей,
b) Гиперболы--если она параллельна къ плоскости осей,
и c) Лемнискаты — когда она перпендикулярна къ линіи, разсѣкающей уголъ между осями на двѣ равныя части.

Происхожденіе этихъ кривыхъ объяснено еще Френелемъ изъ общей теоріи свѣта. Бертенъ очень остроумно воспользовался уравненіемъ поверхности свѣтовой волны и получилъ особеннаго вида поверхность, названную имъ *изохроматическою*, изъ которой можно наглядно получить всѣ вышеупомянутые виды кривыхъ линій. Постараемся изложить способъ Бертена въ общихъ чертахъ.

Извѣстно, что радужныя, или темныя линіи въ кристаллическихъ пластинкахъ происходятъ отъ интерференціи лучей *обыкновеннаго* и *необыкновеннаго*, при извѣстной разности въ ихъ пути, иначе, при извѣстномъ *замедленіи* одного относительно другаго, которое всегда можетъ быть выражено опредѣленнымъ числомъ волнъ. Положимъ, что на первую поверхность кристаллической пластинки падаетъ пучекъ поляризованнаго свѣта, который помощію извѣстныхъ снарядовъ сконцентрированъ въ точкѣ O. Начиная отъ O распространяются лучи попарно, обыкновенные съ необыкновенными, по всѣмъ направленіямъ; но лучи каждой пары проходятъ неодинакій путь, потому что ихъ скорости неодинаковы. Пусть e толщина пластинки; Om и Om' пути лучей, пробѣгаемые со скоростями v и v' внутри пластинки; пусть Om и Om' составляютъ углы v и v' съ поверхностью пластинки: то замедленіе δ можетъ быть выражено:

$$\delta = \frac{e}{\cos r}\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right) \qquad (1)$$

при чемъ предполагается, что всегда разница между r и r' незначительна, такъ что cos ихъ можно принять равными. Такое предположеніе не вводитъ большой ошибки, потому что въ тонкой пластинкѣ удаленіе обыкновеннаго луча отъ необыкновеннаго чрезвычайно мало. По этому (1) формулу можно понимать такъ, что два луча, пробѣгая одинакое пространство $\frac{e}{\cos r}$ съ различными скоростями, составляютъ замедленіе δ. Отсюда слѣдуетъ, что (1) формулу можно объобщить и написать:

$$\delta = u\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v'}\right), \qquad (2)$$

Такъ какъ лучи, выходящіе изъ O, распространяются по всѣмъ направленіямъ; то на всякой прямой линіи, проходящей чрезъ O, можно найти точку, до которой доходятъ лучи съ *даннымъ* замедленіемъ. Если соединимъ между собою всѣ подобныя точки, то получимъ *поверхность*, которая будетъ имѣть то свойство, что каждая пара лучей встрѣтитъ ее съ одинакимъ замедленіемъ; слѣдовательно такая поверхность можетъ назваться *изохроматическою*. Если предположимъ, что эта поверхность построена около точки O; то вторая поверхность кристаллической пластинки разсѣчетъ ее по какой либо кривой, которая будетъ имѣть то свойство, что всякая пара лучей выходящихъ изъ O, встрѣтитъ ее съ одинакимъ δ, а по сему она будетъ *изохроматическая кривая*. Таково происхожденіе изохроматической поверхности и изохроматическихъ кривыхъ; остается только опредѣлить ихъ видъ.

Изохроматическая поверхность имѣетъ то свойство, что всякая точка на ней удовлетворяетъ уравненію (2); поэтому послѣднее есть основное уравненіе *изохроматической поверхности*. Уравненію (2) можно дать другой видъ. Возьмемъ три главныя оси упругости кристалла за оси координатъ; назовемъ w радіусъ векторъ поверхности свѣтовой волны; l, m, n углы, составляемые радіусомъ w съ осями координатъ; α, β, γ три главные показателя преломленія: то поверхность волны выражается:

$$\frac{\cos^2 l}{\alpha^2 w^2 - 1} + \frac{\cos^2 m}{\beta^2 w^2 - 1} + \frac{\cos^2 n}{\gamma^2 w^2 - 1} = 0 \qquad (3)$$

Помощію простаго преобразованія можно дать этому уравненію видъ:

$$\frac{1}{w^4} - \frac{1}{w^2}[(\gamma^2+\beta^2)\cos^2 l + (\gamma^2+\alpha^2)\cos^2 m + (\alpha^2+\beta^2)\cos^2 n] + \ldots$$
$$+ \gamma^2\beta^2\cos^2 l + \gamma^2\alpha^2\cos^2 m + \beta^2\alpha^2\cos^2 n = 0 \qquad (4)$$

Такъ какъ распространеніе лучей свѣта происходитъ по радіусамъ волнъ, то $\frac{1}{v}$ и $\frac{1}{v'}$ должны быть корнями этого (4) уравненія, такъ что

$$\frac{1}{v'^2} + \frac{1}{v^2} = (\gamma^2\beta^2)\cos^2 l + (\gamma^2\alpha)\cos^2 m + (\alpha^2+\beta^2)\cos^2 n \qquad (5)$$

$$\frac{1}{v'^2} \cdot \frac{1}{v^2} = \gamma^2\beta^2\cos^2 l + \gamma^2\alpha^2\cos^2 m + \alpha^2\beta^2\cos^2 n \qquad (6)$$

Поэтому уравненіе изохроматической поверхности можно будетъ преобразовать, если въ (2) покажемъ существованіе $\frac{1}{v'^2} + \frac{1}{v^2}$ и $\frac{1}{v'^2} \cdot \frac{1}{v^2}$; а для сего, возвысивъ (2) два раза во вторую степень, получимъ:

$$\left[u^2\left(\frac{1}{v'^2} + \frac{1}{v^2}\right) - \delta^2\right]^2 = \frac{4u^4}{v^2 v'^2} \qquad (7)$$

Поставляя вмѣсто $\frac{1}{v'^2} + \frac{1}{v^2}$ и $\frac{1}{v'^2} \cdot \frac{1}{v^2}$ ихъ величины изъ (5) и (6) получимъ полярное уравненіе изохроматической поверхности, а перемѣняя полярныя координаты въ прямоугольныя, по формуламъ

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2$$
$$x = u\cos l$$
$$y = u\cos m$$
$$z = u\cos n$$

получимъ уравненіе (7) въ такомъ видѣ:

$$[(\beta^2+\gamma^2)x^2 + (\alpha^2+\gamma^2)y^2 + (\beta^2+\alpha^2)z^2 - \delta^2]^2 = \ldots$$
$$= 4(x^2+y^2+z^2)(\beta^2\gamma^2x^2 + \alpha^2\gamma^2y^2 + \beta^2\alpha^2z^2)\ . \qquad (8)$$

Чтобы познакомиться поближе со свойствомъ (8) общаго уравненія изохроматической поверхности, необходимо разсмотрѣть его для одноосныхъ и двуосныхъ кристалловъ отдѣльно.

1) Одноосные кристаллы характеризуются равенствомъ двухъ показателей, напримѣръ $\alpha=\beta=m$ показателю обыкновеннаго луча; а $\gamma=m'$ показателю необыкновеннаго луча; тогда (8) будетъ:

$$(m^{2'}-m^2)(y^2-z^2) - 2\delta^2(m^{2'}+m^2)(y^2+z^2) - 4m^2\delta^2x^2 + \delta = 0 \qquad (9)$$

Если координаты выбраны такъ, что x направлено по единственной оси кристалла; то (9) показываетъ что

поверхность происходитъ отъ обращенія кривой линіи около оси x, и что эта производящая кривая, есть:

$$(m^{2'}-m^2)y^4-2\delta^2(m^{2'}+m^2)y^2-4m^2\delta^2x^2+\delta^4=0 \qquad (10)$$

Полагаемъ $x=0$, то есть ищемъ пересѣченіе кривой съ y, получаемъ тогда уравненіе 4-ой степени, которое разрѣшивъ, и удержавъ положительное выраженіе получимъ

$$Y=\frac{\delta}{m'-m}$$

Отсюда видно, что кривая начинается на нѣкоторомъ разстояніи отъ x. Уравненіе (10) показываетъ, что съ увеличеніемъ x, увеличивается и y, но мало, такъ что довольно большому x соотвѣтствуетъ y, мало отличающаяся отъ Y. Уравненіе (10) принадлежитъ гиперболѣ, почти равносторонней, и помощію простаго преобразованія можно его представить въ общеупотребительномъ видѣ. Для сего къ (10) прибавимъ и отнимемъ по $(m^{2'}-m^2)^2\, Y^4$, то въ первомъ членѣ уравненія можно будетъ имѣть общій множитель y^4-Y^4, который можно представить подъ видомъ $(y^2-Y^2)(y^2+Y^2)$; вмѣсто y^2+Y^2 можно взять $2Y^2$ приблизительно, и вмѣсто Y взять $\frac{\delta}{m'-m}$; тогда, сдѣлавъ въ другихъ членахъ тоже очень простыя преобразованія, получимъ (10) уравненіе подъ видомъ:

$$m'y^2-m\,x^2=m'\,.\,\frac{\delta^2}{(m'-m)^2}$$

что и требовалось.

Отсюда видно, что изохроматическая поверхность происходитъ отъ обращенія гиперболы около оси x, оптической оси кристалла; слѣдовательно она составляетъ *гиперболоидъ*. Такое тѣло можно построить изъ гипса, или другаго вещества, и оно можетъ служить для нагляднаго объясненія происхожденія радужныхъ линій въ одноосномъ кристаллѣ. И такъ если пластинка перпендикулярна къ оптической оси, то сѣченіе будетъ кругъ, котораго центръ на оси x, и находится на разстояніи e, равномъ толщинѣ пластинки, отъ начала O; очевидно, что величина круга увеличивается пропорціонально e.

Если пластинка параллельна къ оптической оси, то сѣченіе второю поверхностью ея образуетъ *гиперболу*. Эти двѣ линіи: кругъ и гипербола получаются изъ уравненія (10), полагая въ первомъ случаѣ $x=e$, а во второмъ $z=e$.

2) Въ двуосныхъ кристаллахъ a, β, γ различны; поэтому уравненіе (8) въ сокращенномъ видѣ не получается; но свойства его будутъ видны изъ нѣкоторыхъ предположеній.

a) Положитъ $\delta=0$; то уравненіе (8) будетъ:

$$[(\gamma^2-\beta^2)x^2-(\beta^2-a^2)z^2]^2+y^2[(\gamma^2-a^2)y^2+2(\gamma^2-\beta^2)(\gamma^2-a^2)x^2+2(\gamma^2-a^2)(\beta^2-a^2)z^2]=0$$

такъ какъ всегда $a<\beta<\gamma$, то уравненіе можетъ существовать, когда $y=0$ и $z=x\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2-a^2}}$.

Эти два выраженія принадлежатъ двумъ прямымъ линіямъ, находящимся въ плоскости xz, и которыя составляютъ уголъ съ x, коего тангенсъ $=\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2-a^2}}$. Эти двѣ линіи суть двѣ оси кристалла, по которымъ лучи обыкновенный и необыкновенный проходятъ съ одинакою скоростью, ихъ замедленіе $\delta=0$.

b) Поверхность пересѣкаетъ оси x, y, z, на разстояніяхъ отъ O такихъ:

$$x=\frac{\delta}{\gamma-\beta}$$

$$y=\frac{\delta}{\gamma-a}$$

$$z=\frac{\delta}{\beta-a}\,.$$

c) Главныя сѣченія плоскостями yx, и yz представляютъ замкнутыя кривыя; а именно первая похожа на эллипсъ, коего большая ось по направленію x, а меньшая—по y; но по меньшей оси немного вогнута; вторая изъ кривыхъ—эллипсъ, коего большая ось по z, а меньшая по y.

d) Главное сѣченіе плоскостью xz представляетъ родъ гиперболы, имѣющей четыре ассимптоты, составляющія съ осью x углы, коихъ тангенсы равны $\sqrt{\frac{\gamma^2-\beta^2}{\beta^2-a^2}}$; поэтому онѣ параллельны главнымъ осямъ кристалла. Графическое построеніе кривой показываетъ, что она очень скоро приближается къ ассимптотамъ. Вычисленіе кромѣ того показываетъ, что изохроматическая поверхность имѣетъ двѣ ассимптотическія поверхности цилиндрическаго вида съ круговымъ основаніемъ, которыхъ оси—оптическія оси кристалла.

Сообразивъ все вышесказанное, можно себѣ представить общій видъ изохроматической поверхности, а именно, она походитъ на *Андреевскій крестъ*, котораго плеча цилиндрическія, и направлены по главнымъ осямъ кристалла.

Отсюда слѣдуетъ, a) что когда пластинка перпендикулярна къ одной изъ осей, сѣченіе второю ея поверхностью съ изохроматической поверхностью, произведетъ *кругъ*—радужные кольца; b) когда пластинка параллельна къ плоскости осей, сѣченіе произведетъ *гиперболы*, а именно двѣ группы; наконецъ c) когда пластинка перпендикулярна къ оси x, или къ линіи раздѣляющей уголъ между оптическими осями на двѣ равныя части; то сѣченіе можетъ представить всѣ возможные переходы отъ *эллипса* до *лемнискаты* и до двухъ отдѣльныхъ *овальныхъ* линій.

И такъ изохроматическая поверхность представляетъ *наглядно* тѣ явленія въ кристаллахъ, какія теорія показываетъ вычисленіемъ.

К. Ч.

4 Геометрическій выводъ выраженія площади треугольника въ функціи его сторонъ по Герону Александрійскому.

Въ Nouvelles annales de Mathém. Novemb. 1861 помѣщено любопытное извлеченіе изъ Extraits des manuscrits relatifs à la géometrie pratique des Grecs, textes restitués et traduits en français par J. H Vincent. 1858; но въ которомъ содержится не малое число оши.

бокъ и опечатокъ. Мы приведемъ здѣсь это доказательство, интересное по способу употребленному для него авторомъ, въ исправленномъ и нѣсколько расширенномъ для ясности видѣ.

Начертивъ какой либо треугольникъ ABG и вписавъ въ него кругъ, отмѣтимъ точки прикосновенія послѣдняго со сторонами AB и BG соотвѣтственно буквами D и E, а центръ его буквою H; за тѣмъ продолжимъ сторону GB на столько, чтобы прибавочная часть BC была равна AD. Извѣстно, что длина GC будетъ половина параметра и площадь треугольника одинакова съ площадью прямоугольника $GC.HE$. Теперь къ линіи HG (раздѣляющей уголъ G по поламъ) возстановимъ въ центрѣ H перпендикуляръ и продолжимъ его до пересѣченія сначала съ стороною BG въ точкѣ K, а потомъ съ другимъ перпендикуляромъ BL, который возставимъ на концѣ стороны GB; такимъ образомъ получимъ прямоугольный треугольникъ LBG, который, какъ легко убѣдиться, будетъ подобенъ треугольнику HDA. Въ самомъ дѣлѣ углы BLH и BGH, какъ составляемые взаимно перпендикулярными сторонами, равны; но оба они опираются на общее основаніе BH, слѣд. точки L, B, H, G лежатъ на одной окружности и уголъ $HLG = HBG$, т. е.

$$BLG = HBG + BGH = 90^0 - \tfrac{1}{2} A = DHA \;.$$

На основаніи же доказаннаго подобія треугольниковъ будемъ имѣть

$$\frac{GB}{BL} = \frac{AD}{DH} = \frac{BC}{HE}, \text{ откуда } \frac{GB}{BC} = \frac{BL}{HE};$$

но треугольники BLK и KHE также подобны между собою и даютъ отношеніе $\frac{BL}{HE} = \frac{BK}{KE}$ и слѣд. $= \frac{GB}{BC}$.

Отсюда $\frac{GB+BC}{BC} = \frac{BK+KE}{KE}$, или $\frac{GC}{BC} = \frac{BE}{KE}$,

Послѣднее отношеніе дастъ: $\overline{GC}^2 = GC\,\frac{BC\,.\,BE}{KE}$;

но изъ тр—ка KHG выход. $\overline{HE}^2 = KE\,.\,GE$,

перемножая и извлекая корень получимъ

$$\text{площ. тр—ка} = GC\,.\,HE = \sqrt{GC\,.\,BC\,.\,BE\,.\,GE}\,, =$$
$$= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - BG\right)\left(\frac{p}{2} - AG\right)\left(\frac{p}{2} - AB\right)},$$

гдѣ p означаетъ параметръ.

5. Новыя теоремы относительно круговаго конуса, *Вёнке* (Journal de mathématiques pures et appliquées p. Liouville, Juillet 1861) (*).

1, Если черезъ двѣ какія нибудь точки оси конуса провести двѣ плоскости такимъ образомъ, чтобы квадратъ синуса производящаго угла конуса составлялъ арифметическую средину между квадратами синусовъ наклоненія сѣкущихъ плоскостей къ оси; то получатся эллипсъ и гипербола, въ которыхъ отношеніе осей одинаково.

2, Если черезъ одну и ту же точку оси конуса проведутся двѣ плоскости такимъ образомъ, что квадратъ величины обратной синусу производящаго угла конуса будетъ арифметическимъ среднимъ между квадратами обратныхъ величинъ синусовъ наклоненія обѣихъ сѣкущихъ плоскостей къ оси, то получатся эллипсъ и гипербола, въ которыхъ большія оси и параметры обратно пропорціональны между собою.

3, Обозначая производящій уголъ конуса черезъ a, а наклоненіе сѣкущей плоскости къ оси черезъ b, то произвольныя сѣченія въ какихъ либо конусахъ будутъ подобны между собою если отношеніе $\frac{\cos a}{\cos b}$ останется неизмѣннымъ.

4, Во всѣхъ сѣченіяхъ, которыя выполняютъ равенство $\operatorname{tang} a = \sin b$ отрѣзокъ оси конуса, заключающійся между вершинами и сѣкущими плоскостями всегда равенъ половинѣ малой оси кривой, происходящей отъ сѣченія.

5, Во всѣхъ сѣченіяхъ, которыя выполняютъ условіе $\operatorname{cotg.} a = \sin b$ отрѣзокъ оси конуса, заключающійся между вершинами и сѣкущими плоскостями всегда равняется половинѣ параметра сѣченія.

6, Во всѣхъ сѣченіяхъ, перпендикулярныхъ къ одному изъ реберъ конуса, часть большой оси сѣченія, заключающейся между этимъ ребромъ и осью конуса, равняется половинѣ параметра сѣченія.

7, Если систему конусовъ, описанныхъ около одной и той же оси, но съ различными производящими углами, пересѣчь круговымъ цилиндромъ, описаннымъ около той же оси, и потомъ провести рядъ параллельныхъ плоскостей черезъ центры круговъ, въ которыхъ конусы пересѣкутся съ цилиндромъ, то сѣченія, произведенныя этими плоскостями, каждаго въ соотвѣтственномъ ей конусѣ будутъ имѣть всѣ одинъ и тотъ же параметръ.

8, Если два конуса, имѣющіе общую вершину и ось, но различные производящіе углы a и b, пересѣчь на одномъ и томъ же разстояніи отъ вершины двумя плоскостями, наклоненными къ оси соотвѣтственно подъ углами b и a, то получатся эллипсъ и гипербола, въ коихъ большія оси и параметры будутъ обратно между собою пропорціональны; отношеніе параметровъ будетъ $\frac{\cos a}{\cos b}$, а отношеніе большихъ осей $\frac{\cos b}{\cos a}$. Въ то же время два шара, вписанные въ конусахъ и касательные къ сѣкущимъ плоскостямъ будутъ занимать различное мѣсто, но имѣть ту же самую величину. *Г.*

(*) Эти теоремы даны авторомъ безъ доказательства, а потому мы предлагаемъ ихъ какъ задачи для желающихъ упражняться въ геометрическихъ рѣшеніяхъ. Мы напомнимъ притомъ извѣстную теорему, которая прилагается здѣсь, и которая, если не ошибаемся, въ первый разъ была предложена Дандаленомъ, а именно: если въ круговой конусъ вложить шаръ, то каждая плоскость, касательная къ этому шару разсѣчетъ конусъ такъ, что въ точкѣ касанія будетъ одинъ изъ фокусовъ кривой сѣченія —Такъ, напр. на основаніи этого свойства, теорема 6-я въ текстѣ доказывается весьма просто; ибо, называя разстояніе сѣкущей плоскости отъ вершины конуса C, производящій уголъ α, большую полуось эллипса a и составныя части ея a' и a''; мы тотчасъ получимъ изъ построенія:

$$2a = a' + a'' = C \operatorname{tang} 2\alpha \quad \text{и} \quad a'(1 + \operatorname{tang}\alpha) = C \operatorname{taug}\alpha\,,$$

$$\text{откуда} \quad 2a = \frac{a'(1+\operatorname{tg.}\alpha)\operatorname{tang}2\alpha}{\operatorname{tang}\alpha} = \frac{2a'}{1 - \operatorname{tang}\alpha};$$

но какъ извѣстно $a' = a\,(1 - e)$, гдѣ e эксцентрицитетъ; слѣд. $e = \operatorname{tang}\alpha$ и затѣмъ искомая часть большой оси эллипса будетъ $= a'(1 + e)$, слѣд. $=$ половинѣ параметра.

Прим. Ред.

6. *Краткія извѣстія.*

— Въ послѣднее время открылись въ Европѣ двѣ новыя Обсерваторіи въ замѣнъ старыхъ, которыя уже не были въ состояніи удовлетворять настоящимъ требованіятъ науки, а именно одна въ Копенгагенѣ, вооруженная двумя главными инструментами: 15-ти футовымъ рефракторомъ *Мерца* съ объєктивомъ въ $10^1/_2$ дюймовъ и 3-хъ футовымъ меридіаннымъ кругомъ *Пистора* и *Мартинса*; другая Обсерваторія въ Лейпцигѣ, главнымъ инструментомъ который будетъ экваторіалъ, устраиваемый по образцу находящемуся въ Готѣ и описанному Г-мъ Гaнзеномъ въ №№ 3-мъ и 5-мъ нашего журнала. Труба экваторіала съ объэктивомъ Штейнгеля въ 8 д. будетъ имѣть 12 футовъ фокусной длины. Въ скоромъ времени вѣроятно будетъ окончено устройство и еще 2-хъ новыхъ Обсервоторій, а именно въ Лейденѣ и въ Невшателѣ, первая изъ нихъ также намѣсто старой уже негодной Обсерваторіи. Недавно также окончено устройство новой обсерваторіи въ Лиссабонѣ.— Проэктъ сооруженія новой Обсерваторіи въ Вильнѣ существуетъ уже давно, но къ сожалѣнію приведеніе его въ исполненіе встрѣчаетъ до сихъ поръ затрудненія (См Bulletin de l'Acad. de St. Petersb. 1861 T. IV p. 222).

— Г. *Ауверсъ*, Обсерваторъ въ Кенигсбергѣ, окончилъ большой трудъ вычисленія всѣхъ сдѣланныхъ доселѣ наблюденій Проціона, съ цѣлію точнѣйшаго опредѣленія пути этой звѣзды, обращающейся около другой невидимой нами, какъ доказали уже извѣстныя изслѣдованія *Петерса*. Видимый поперечникъ пути Проціона составляетъ весьма близко 2″, время обращенія почти 40 лѣтъ и масса тёмнаго тѣла выходитъ по вычисленіямъ болѣе 0,73 солнечной массы. Форма пути не отличается замѣтно отъ круга. (Изъ письма Г. Ауверсъ къ издателю отъ 10-го Декаб.)

— Др. *Брюстеръ* (Philos. Magaz. Octob. 1861) нашелъ, что система, состоящая изъ нѣсколькихъ тонкихъ стеклянныхъ пластинокъ, поставленная въ поляризаціонный микроскопъ, разлагаетъ проходящій свѣтъ, подобно одноосным кристалламъ; а именно получается система радужныхъ колецъ, ртдѣленныхъ черным крестомъ. Въ отдѣльныхъ пластинкахъ нельзя было замѣтить того свойства, развѣ только цвѣта тонкихъ пластинокъ, если пластинки достаточно тонки. — Явленія эти объясняетъ Брюстеръ интерференціею преломленныхъ и отраженныхъ лучей. Если пучекъ свѣта падаетъ на прозрачную пластинку, то часть его отражается отъ передней поверхности, другая задерживается внутри пластинки, а третья выходитъ; но во второй части въ особенности замѣчательны лучи, отражающіеся отъ второй поверхности пластинки, потомъ опять отражающіеся отъ первой и выходящіе вмѣстѣ съ третьею частью пучка: по изслѣдованіямъ Брюстера, сдѣланнымъ уже давно, эта часть поляризована противуположно первой преломленной части, которая тоже отчасти поляризована чрезъ преломленіе. Такъ какъ обѣ части пучка выходятъ вмѣстѣ, то отличить ихъ трудно, развѣ только при достаточной напряженности свѣта; часть, поляризованная чрезъ отраженіе, представляется въ видѣ матоваго свѣта—какъ это уже давно замѣчено Брюстеромъ. Когда же лучъ падаетъ наклонно на тонкую пластинку, то одна часть луча самая свѣтлая, поляризуется чрезъ преломленіе, другая часть, отразившись отъ второй поверхности, отразится отъ первой и выходитъ поляризованною чрезъ двойное отраженіе, но противуположно первой части; тутъ будетъ еще нѣсколько отраженій и нѣсколько частей луча, которые поляризованы чрезъ отраженіе. Когда соединено нѣсколько пластинокъ, то часть выходящая послѣ одного преломленія ослабѣваетъ. между тѣмъ какъ выходящая послѣ нѣсколькихъ отраженій усиливается, и тогда получаются замѣтныя двѣ части поляризованнаго противуположно свѣта. Отсюда и происходитъ явленіе согласное съ таковымъ въ одноосныхъ кристаллахъ.

Это наблюденіе можетъ послужить современемъ къ объясненію происхожденія радужныхъ линій въ кристаллахъ, не прибѣгая къ атомистической теоріи.

— *Ламонъ* (Pogg. Ann. B. CXIV p. 281) доказываетъ, что ежедневное періодическое колебаніе высоты барометра зависитъ не только отъ нагрѣванія земной поверхности, но еще и отъ космическаго явленія, а именно *прилива и отлива* атмосфернаго воздуха, и это заключеніе подтверждаетъ наблюденіями, взятыми изъ метеорологическихъ таблицъ различныхъ мѣстъ земной поверхности. А. Броунъ (Brown) посредствомъ наблюденій надъ полудневнымъ измѣненіемъ высоты барометра, пришелъ къ слѣдующему результату: Когда солнце или луна подъ горизонтомъ, колебаніе высоты барометра въ продолженіе полусутокъ, въ промежуткѣ между тропиками, имѣетъ туже самую величину на всякихъ высотахъ до 2000 метровъ. но когда одно изъ упомянутыхъ свѣтилъ надъ горизонтомъ колебаніе высоты барометра, на высотѣ 2000 метровъ, имѣетъ амплитуду только въ половину той, которая наблюдаема бываетъ при уровнѣ моря (Cosmos).

— Въ засѣданіи Лондонскаго Фотографическаго Общества 9 Сенттября (The Britisch Journal of Photography) Профессоръ *Брюстеръ* сдѣлалъ нѣсколько замѣчаній относительно наблюдаемаго Г. *Дове* особеннаго блеска, въ какомъ является въ стереоскопѣ какая либо геометрическая фигура, если рисунокъ, соотвѣтствующій одному глазу—черный на бѣломъ грунтѣ, и на оборотъ для другаго глаза—бѣлый на черномъ грунтѣ. По объясненію Профессора Дове, для произведенія впечатлѣнія блестящей поверхности необходимо присутствіе прозрачнаго и отражающаго слоя, чрезъ который бы мы видѣли другое тѣло. Отношеніе между отраженнымъ наружнымъ и отраженнымъ внутри, или разсѣяннымъ свѣтомъ обусловливаетъ происхожденіе блеска. Это явленіе имѣетъ напримѣръ мѣсто, если нѣсколько часовыхъ стеколъ будутъ положены одно на другое, или когда пластинка слюды, раскаленная до красна, раздѣляется на множество тончайшихъ и совершенно прозрачныхъ листочковъ. Такимъ же образомъ объясняется и блескъ жемчуга, кристалловъ полеваго шпата и т. д. Но по мнѣнію Пр. Брюстера это объясненіе недостаточно для случая стереоскопическаго зрѣнія и въ подтвержденіе этого онъ приводитъ свое наблюденіе надъ отсутствіемъ

упоминаемаго блеска въ томъ случаѣ, когда фигуры не представляютъ геометрической поверхности, хотя въ то же время исполняютъ всѣ другія условія. Поэтому происхожденіе стереоскопическаго блеска Брюстеръ приписываетъ не физическимъ, но физіологическимъ причинамъ и указываетъ при этомъ на слѣдующія обстоятельства: 1, При полученіи рельефнаго впечатлѣнія въ стереоскопѣ отъ двухъ изображеній, которыхъ части находятся въ различныхъ разстояніяхъ отъ глаза, оптическія оси глазъ находятся въ безпрестанномъ движеніи не только для того, чтобы соединить подобные пункты, но дабы получить и общее впечатлѣніе; 2-е, если обѣ поверхности разноцвѣтны, или разнотѣнны, то нервная сѣтка каждаго глаза постоянно старается уловить и снова теряетъ одинъ изъ этихъ цвѣтовъ или тоновъ; каждый оптическій нервъ содѣйствуетъ къ тому, чтобы доставить мозгу впечатлѣніе одного цвѣта, или одного изъ различныхъ оттѣнковъ. И изъ этой-то борьбы различныхъ ощущеній происходитъ, по мнѣнію Брюстера, впечатлѣніе подобное блеску. Въ подтвержденіе этого объясненія онъ приводитъ еще слѣдующія два наблюденія. Если два дагеротипныя изображенія блестящихъ предметовъ изъ черной бронзы разсматривать отдѣльно, то нельзя узнать вещества, изъ какого приготовлены эти предметы, но въ стереоскопѣ блескъ появляется снова и тотчасъ открываетъ природу вещества. Изображенія мыльныхъ пузырей также являются матовыми отдѣльно, но въ стереоскопѣ снова получаютъ свой блескъ. Въ этихъ и подобныхъ случаяхъ соединяются цвѣта и оттѣнки одинаковаго напряженія и потому нѣтъ основанія утверждать, согласно теоріи Дове, что обѣ совпадающія плоскости находятся въ различныхъ разстояніяхъ и что одна изъ нихъ бываетъ видима черезъ другую.

— Открыта новая телескопическая комета Г-мъ *Виннеке*, старшимъ астрономомъ въ Пулковѣ 8-го Янв. (27 Дек.), которая представляется въ видѣ довольно свѣтлаго тумана, сгущеннаго къ срединѣ и имѣющаго въ поперечникѣ отъ 3′ до 4′. Въ настоящее время, удаляясь отъ солнца и отъ земли, комета быстро ослабѣваетъ въ свѣтѣ. Первые, вычисленные элементы представляли, по замѣчанію Виннеке, отдаленное сходство съ элементами кометы Тихо де Браге 1590; но позднѣйшія вычисленія дѣлаютъ это предположеніе мало вѣроятнымъ.

— Послѣдне-открытыя малыя планеты получили слѣд. названія: 68 *Лето*, 69 *Гесперія*, 70 *Пенопеа* и 71 *Ніобе*.

Рѣшеніе задачъ NN. 1 и 2, *предложенныхъ въ* N. 8 *„Вѣстника.“ Л. Износкова.*

№ 1. Возьмемъ опредѣленный интегралъ:

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+x\cos^2\varphi}$$

и равный ему:

$$U=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{1+x\sin^2\varphi};$$

то сумма ихъ составитъ:

$$2U=\frac{1}{2}\,\frac{(2+x)}{1+x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{1+x_1\sin^2 2\varphi},$$

или

$$2U=\frac{1}{2}\,\frac{(2+x)\,U_1}{1+x}, \qquad (1)$$

гдѣ:

$$U_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{1+x_1\sin^2 2\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\,d\varphi}{1+x_1\cos^2 2\varphi}$$

и

$$x_1=\frac{x^2}{4\,(1+x)}.$$

Подобнымъ же образомъ получимъ:

$$2U_1=\frac{1}{4}\,\frac{(4+x_1)\,U_2}{1+x_1},$$

$$2U_2=\frac{1}{8}\,\frac{(8+x_2)\,U_3}{1+x_2} \quad \text{и т. д.}$$

Подставивъ въ (1) вмѣсто $U_1\ U_2\ldots$ ихъ значенія, получимъ.

$$(A)\quad U=\frac{(2+x)\,(4+x_1)\,(8+x_2)\ldots}{4\,.\,8\,.\,16\ldots(1+x)\,(1+x_1)\,(1+x_2)\ldots},$$

гдѣ вообще:

$$x_i=\frac{x^2}{4\,(1+x)}$$

Но съ другой стороны:

$$(B)\qquad U=\int_0^{\infty} \frac{d\varphi}{1+x\cos^2\varphi}=\frac{\pi}{2\sqrt{1+x}};$$

сравнивая (A) съ (B), получимъ искомую формулу.

№ 2. Возьмемъ опредѣленный инреградъ:

$$\int_b^a e^{-xy} F(x)\, x\, dx \ .$$

Послѣдовательнымъ интегрированіемъ по частямъ получимъ:

$$\int_b^a e^{-xy} F(x)\, x\, dx = -\Big[\frac{e^{-xy}}{y}\Big(x F(x) + \frac{(x F(x))^{(\prime)}}{y} + \frac{(x F(x))^{(\prime\prime)}}{y^2} + \frac{(x F(x))^{(\prime\prime\prime)}}{y^3} + \ldots\Big)\Big]_b^a$$

$$= \Big[e^{-by} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{[b F(b)]^{(i)}}{y^i} - e^{-ay} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{[a F(a)]^{(i)}}{y^i}\Big] \frac{1}{y} \ .$$

А умноживъ это выраженіе на dy и интегрируя въ отношеніи y въ границахъ 0 и ∞, получимъ искомую формулу:

$$\int_0^{\infty} \Big[e^{-by} \sum_{i=0}^{i=\infty} \frac{[b F(b)]^{(i)}}{y^i} - e^{-ay} \sum \frac{[a F(a)]^{(i)}}{y^i}\Big] \frac{dy}{y} = \int_b^a F(x)\, dx \ .$$

Рѣшеніе задачи N. 5, *М. Гусева.*

Для доказательства предложеннаго ряда возьмемъ:

$$(e^x - 1)^n = \{x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2\,.\,3} x^3 + \ldots\}^n = x^n + A x^{n+1} + \ \ldots\ldots \ ; \quad (1)$$

но въ то же время, разлагая по биному Ньютона имѣемъ:

$$(e^x - 1)^n = e^{nx} - \frac{n}{1}\, e^{(n-1)x} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, e^{(n-2)x} - \ldots$$

Развивая каждый членъ этого ряда въ строку и расположивъ новый рядъ по степенямъ x до x^n включительно получимъ:

$$(e^x - 1)^n = 1 - \frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2} - \ldots$$
$$+ \{n - \frac{n}{1}(n-1) + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2) - \ldots\}\, x$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2}\{n^2 - \frac{n}{1}(n-1)^2 + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^2 - \ldots\}\, x^2$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ \frac{1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots n}\{n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^n - \ldots\}\, x^n \ .$$

Сравнивая этотъ рядъ съ выраженіемъ (I) мы замѣчаемъ во 1-хъ, что всѣ члены онаго, въ коихъ входитъ x съ показателемъ меньшимъ n, должны быть нулями; ибо наинизшая степень отъ x въ выраженіи (1) есть n-ая; такимъ образомъ коефиціентъ, при какомъ либо x^p, гдѣ p меньше n, есть нуль и слѣдовательно

$$n^p - \frac{n}{1}(n-1)^p + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^p - \ldots = 0 \ ;$$

во 2-хъ коефиціентъ при x^n, по сравненію съ (1), долженъ быть равенъ 1-цѣ, слѣдовательно

$$n^n - \frac{n}{1}(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^n - \ldots = 1\,.\,2\,.\,3\ldots n \ \ldots (a)$$

Этому ряду можно дать болѣе общій видъ, а именно складывая его произвольное число разъ съ рядомъ

$$n^{n-1} - \frac{n}{1}(n-1)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}(n-2)^{n-1} - \ldots = 0$$

получимъ:

$$m\,n^{n-1}-(m-1)\,\frac{n}{1}\,(n-1)^{n-1}+(m-2)\,\frac{n(n-1)}{1.2}\,(n-2)^{n-1}-\ldots=1.2\ldots n\ ,$$

гдѣ m есть произвольное число; представляя его подъ видомъ $\frac{p}{q}$, и помножая цѣлый рядъ на q имѣемъ:

$$p\,n^{n-1}-(p-q)\,\frac{n}{1}\,(n-1)^{n-1}+(p-2q)\,\frac{n(n-1)}{1.2}\,(n-2)^{n-1}\ldots=q.1.2\ldots n\,.$$

гдѣ очевидно p и q могутъ быть цѣлыми, дробными положителными, или отрицательными.

Сюда можно прибавить еще рядъ подобный (α), получаемый сравненіемъ коефиціентовъ при x^{n+1}, а именно

$$n^{n+1}-\frac{n}{1}\,(n-1)^{n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}\,(n-2)^{n+1}-\ldots=\frac{n}{1.2}\,\Gamma(n+2)\ldots\ldots(\beta)$$

Поправка: На страницѣ 166 Вѣстника, въ строкахъ 11 и 12 сверху сказано: »но если $m=0$; то очевидно, для сохраненія послѣдняго равенства, необходимо, дабы въ немъ n было >0 и <2; между тѣмъ какъ должно было сказать: n было >-1 и $<+1$, ибо иначе условіе, $a>0$ и <1 невыполнимо.

КОНЕЦЪ I-го ТОМА.

Отъ Редакціи: Желающіе подписаться на II-й Томъ обращаются съ требованіями „въ Редакцію Вѣстника Математическихъ Наукъ при Виленской Обсерваторіи“ и прилагаютъ *пять* руб. сер. Отдѣльные NN. Вѣстника, по мѣрѣ выхода оныхъ въ свѣтъ, будутъ разсылаться Г. г. подписчикамъ въ теченіи 1862 года *черезъ посредство Газетныхъ Экспедицій.* Время выхода перваго N°. II-го Тома будетъ зависѣть отъ того какъ скоро соберется достаточное для начатія изданія число подписчиковъ, т. е. когда оно перейдетъ, по крайней мѣрѣ, за первую сотню.

Окладка и регистръ статей, содержащихся въ I-мъ Томѣ, равно какъ и обѣщанное прибавленіе съ библіографическимъ указателемъ журнальныхъ статей, будутъ доставлены всѣмъ подписчикамъ на I-й Томъ въ непродолжительномъ времени.

Печатать позволяется, Вильно 3 Февраля 1861 года. *Ценсоръ Статскій Совѣтникъ и Кавалеръ А. Мухинъ.*

ВИЛЬНО Типографія А. Марциновскаго. Редакторъ-Издатель *М. Гусевъ.*